

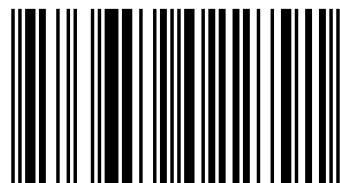
Formulario de Álgebra

No cabe duda que la matemática, como área de enseñanza, ha sido y sigue siendo un auténtico "calvario" para un porcentaje muy significativo de estudiantes. Las dificultades que entrañan su enseñanza y aprendizaje y los malos resultados en los diferentes niveles, la han convertido en una disciplina árida y selectiva. Como área del conocimiento, la matemática está presente en todas las épocas y culturas como una necesidad para cuantificar la realidad, lo cuantitativo. Aunque fruto de un consenso artificial no podemos negar, que forma parte de nuestra vida cotidiana. La única finalidad que nos ha motivado a preparar este formulario se reduce a exponer al estudiante las temidas matemáticas bajo un aspecto más atractivo, a familiarizarse del modo más simple con las definiciones, propiedades, teoremas, fórmulas y artificios; facilitando de esta manera la tarea del estudiante de educación secundaria. Dicho de otra manera nuestro propósito se reduce a guiar al estudiante en un paseo más ordenado y lógico por el maravilloso mundo del álgebra. Hemos querido escribir exclusivamente lo que los docentes procuramos hacer en clases y, lo que un estudiante de educación media debería saber.



Carlos David Laura Quispe

Es Magíster en Informática Educativa por la Universidad de la Frontera (UFRO) de Chile. Es Lic. en Educación, especialidad Físico-Matemático (UNSA). Es Economista (UNSA). Ha estudiado Matemática Aplicada en México (CIMAT). Es investigador de la Universidad Católica Santa María. Es investigador del Centro de Investigación Económica y Social (CIES).



978-3-659-02279-1

editorial académica **española**

Álgebra

$$\begin{aligned}\log(A \cdot B) &= \log A + \log B \\ \log(A \div B) &= \log A - \log B \\ \log(A^n) &= n \log A \\ \log_b a &= \frac{\log_c a}{\log_c b}\end{aligned}$$



Carlos David Laura Quispe

Formulario de Álgebra

Un Recorrido por Definiciones, Propiedades, Teoremas, Fórmulas y Artificios; a Través de 115 Mapas Mentales.

Laura Quispe

Carlos David Laura Quispe

Formulario de Álgebra

FOR AUTHOR USE ONLY

FOR AUTHOR USE ONLY

Carlos David Laura Quispe

Formulario de Álgebra

**Un Recorrido por Definiciones, Propiedades,
Teoremas, Fórmulas y Artificios; a Través de 115
Mapas Mentales.**

FOR AUTHOR USE ONLY

Editorial Académica Española

Impresión

Información bibliográfica publicada por Deutsche Nationalbibliothek: La Deutsche Nationalbibliothek enumera esa publicación en Deutsche Nationalbibliografie; datos bibliográficos detallados están disponibles en internet en <http://dnb.d-nb.de>.

Los demás nombres de marcas y nombres de productos mencionados en este libro están sujetos a la marca registrada o la protección de patentes y son marcas comerciales o marcas comerciales registradas de sus respectivos propietarios. El uso de nombres de marcas, nombre de producto, nombres comunes, nombre comerciales, descripciones de productos, etc. incluso sin una marca particular en estas publicaciones, de ninguna manera debe interpretarse en el sentido de que estos nombres pueden ser considerados ilimitados en materias de marcas y legislación de protección de marcas y, por lo tanto, ser utilizadas por cualquier persona.

Imagen de portada: www.ingimage.com

Editor: Editorial Académica Española es una marca de
LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co. KG
Heinrich-Böcking-Str. 6-8, 66121 Saarbrücken, Alemania
Teléfono +49 681 3720-310, Fax +49 681 3720-3109
Correo Electronico: info@eae-publishing.com

Publicado en Alemania

Schaltungsdienst Lange o.H.G., Berlin, Books on Demand GmbH, Norderstedt,
Reha GmbH, Saarbrücken, Amazon Distribution GmbH, Leipzig
ISBN: 978-3-659-02279-1

Imprint (only for USA, GB)

Bibliographic information published by the Deutsche Nationalbibliothek: The Deutsche Nationalbibliothek lists this publication in the Deutsche Nationalbibliografie; detailed bibliographic data are available in the Internet at <http://dnb.d-nb.de>.

Any brand names and product names mentioned in this book are subject to trademark, brand or patent protection and are trademarks or registered trademarks of their respective holders. The use of brand names, product names, common names, trade names, product descriptions etc. even without a particular marking in this works is in no way to be construed to mean that such names may be regarded as unrestricted in respect of trademark and brand protection legislation and could thus be used by anyone.

Cover image: www.ingimage.com

Publisher: Editorial Académica Española is an imprint of the publishing house
LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co. KG
Heinrich-Böcking-Str. 6-8, 66121 Saarbrücken, Germany
Phone +49 681 3720-310, Fax +49 681 3720-3109
Email: info@eae-publishing.com

Printed in the U.S.A.

Printed in the U.K. by (see last page)

ISBN: 978-3-659-02279-1

Copyright © 2012 by the author and LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co. KG
and licensors

All rights reserved. Saarbrücken 2012

FORMULARIO DE ÁLGEBRA:

**Un Recorrido por Definiciones, Propiedades,
Teoremas, Fórmulas y Artificios; a Través
de 115 Mapas Mentales.**

Carlos David Laura Quispe¹

¹ Carlos David Laura Quispe, es Licenciado en Ciencias de la Educación especialidad físico-matemático, Matemático, Economista y Magister en Informática Educativa, por el Instituto de Informática Educativa (IIE) de la Universidad de la Frontera (UFRO), de la Región Araucanía de Chile. Es investigador del Consorcio de Investigación Económica y Social (CIES).

FOR AUTHOR USE ONLY

CONTENIDO

PRESENTACIÓN	9
SIMBOLOGÍA MATEMÁTICA	11
NOTACIÓN MATEMÁTICA	12
LENGUAJE ALGEBRAICO	13
CONJUNTOS NUMÉRICOS	14
1.1 Conjuntos numéricos	14
1.2 Conjunto de los números racionales	15
1.3 Clasificación de los números racionales	16
1.4 Fracción generatriz de un decimal	17
1.5 Sistema de los números reales	18
TEORÍA DE EXPONENTES	19
2.1 Teoría de exponentes	19
2.2 Propiedades de teoría de exponentes	20
2.3 Ecuaciones exponenciales	21
2.4 Resolución de una ecuación exponencial	22
POLINOMIOS EN R	23
3.1 Polinomios en R	23
3.2 Grado de un polinomio en R	24
3.3 Operaciones con polinomios	25
3.4 Raíz cuadrada de polinomios	26
PRODUCTOS NOTABLES	27
4.1 Productos notables	27
4.2 Productos notables especiales	28
4.3 Productos notables de un trinomio al cuadrado	29
4.4 Productos notables condicionales	30
DIVISIÓN DE POLINOMIOS	31
5.1 División de polinomios	31
5.2 Teoremas de la división de polinomios	32
5.3 División de polinomios: método de Horner	33
5.4 División de polinomios: método de Ruffini	34

5.5 División de polinomios: teorema del resto.....	35
5.6 División de polinomios: casos especiales	36
COCIENTES NOTABLES.....	37
6.1 Cocientes notables.....	37
6.2 Cocientes notables: término general.....	38
6.3 Cocientes notables: formas abreviadas	39
FACTORIZACIÓN.....	40
7.1 Factorización.....	40
7.2 Factorización: aspa simple y aspa doble	41
7.3 Factorización: aspa doble especial	42
7.4 Factorización: divisores binomios	43
7.5 Factorización: aspa triple	44
7.6 Método de los artificios	45
FRACCIONES ALGEBRAICAS	46
8.1 Fracciones algebraicas	46
8.2 Operaciones con fracciones algebraicas	47
8.3 Fracciones parciales	48
RADICACIÓN EN R.....	49
9.1 Radicación en R.....	49
9.2 Propiedades de radicación en R.....	50
9.3 Propiedades de radicación en R: propiedades adicionales.....	51
9.4 Radicales dobles.....	52
9.5 Casos de radicales dobles.....	53
9.6 Racionalización	54
FACTORIALES.....	55
10.1 Factoriales	55
10.2 Propiedades de los factoriales	56
10.3 Números combinatorios	57
10.4 Propiedades de los números combinatorios	58
10.5 Binomio de Newton.....	59
10.6 Binomio de Newton: triángulo de Pascal.....	60

NÚMEROS IMAGINARIOS.....	61
11.1 Números imaginarios	61
11.2 Propiedades de los números imaginarios	62
11.3 Números complejos	63
11.4 Representación de números complejos	64
ECUACIONES	65
12.1 Ecuaciones	65
12.2 Ecuaciones irracionales	66
12.3 Ecuaciones fraccionarias	67
12.4 Ecuaciones cuadráticas	68
12.5 Ecuaciones cuadráticas: propiedades de las raíces	69
12.6 Ecuaciones cuadráticas: propiedades adicionales.....	70
12.7 Ecuaciones bicuadradas	71
12.8 Ecuaciones polinómicas.....	72
12.9 Ecuaciones polinómicas: propiedades.....	73
MATRICES.....	74
13.1 Matrices	74
13.2 Matrices: orden de una matriz.....	75
13.3 Matrices: matrices especiales	76
13.4 Matrices: casos particulares de una matriz cuadrada	78
13.5 Operaciones con matrices	82
13.6 Multiplicación de matrices	83
13.7 Potenciación de matrices	84
13.8 Matriz de cofactores.....	86
13.9 Matriz inversa.....	87
13.10 Matriz inversa: método de Gauus	88
13.11 Matriz inversa: método de adjuntas	89
DETERMINANTES.....	90
14.1 Determinantes.....	90
14.2 Determinantes: regla de sarrus.....	91
14.3 Determinantes: propiedades	92

SISTEMAS DE ECUACIONES	93
15.1 Sistemas de ecuaciones	93
15.2 Sistemas de ecuaciones equivalentes	94
15.3 Clases de sistemas de ecuaciones	95
15.4 Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas	96
15.5 Sistemas de ecuaciones lineales con tres incógnitas	97
15.6 Sistemas de ecuaciones: método de Cramer	98
15.7 Sistemas de ecuaciones lineales con "n" incógnitas	99
15.8 Teorema de ROUCHÉ FRÖBENIUS	100
15.9 Sistemas de ecuaciones homogéneas	101
15.10 Método de Gauus para resolver sistemas de ecuaciones lineales..	102
15.11 Resumen de los sistemas de ecuaciones	103
15.12 Sistemas de ecuaciones cuadráticas	104
INTERVALOS	105
16.1 Intervalos	105
16.2 Clases de intervalos	106
16.3 Conjuntos acotados	107
16.4 Inecuaciones	108
16.5 Inecuaciones: soluciones	109
16.6 Inecuaciones: propiedades	110
16.7 Inecuaciones: propiedades adicionales	111
16.8 Inecuaciones: método de los puntos críticos	112
16.9 Valor adsoluto	113
PROGRESIÓN ARITMÉTICA	114
17.1 Progresión aritmética (P.A.)	114
17.2 Progresión aritmética: propiedades	115
17.3 Progresión geométrica (P.G.)	116
17.4 Progresión geométrica: propiedades	117
LOGARITMOS	118
18.1 Logaritmos	118
18.2 Logaritmos: propiedades	119

18.3 Logaritmo neperiano	120
18.4 Cologaritmo y antilogaritmo	121
SERIES ARITMÉTICAS NOTABLES	122
19.1 Series aritméticas notables: adición.....	122
19.2 Series aritméticas notables: producto	123
19.3 Series de Taylor.....	124
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	125

FOR AUTHOR USE ONLY

FOR AUTHOR USE ONLY

Presentación

No cabe duda que la matemática, como área de enseñanza, ha sido y sigue siendo un auténtico “calvario” para un porcentaje muy significativo de estudiantes. Las dificultades que entrañan su enseñanza y aprendizaje y los malos resultados en los diferentes niveles, la han convertido en una disciplina árida y selectiva. Como área del conocimiento, la matemática está presente en todas las épocas y culturas como una necesidad para cuantificar la realidad, lo cuantitativo, aunque fruto de un consenso artificial, forma parte de nuestra vida cotidiana.

(Macnab & Cummine (1986) sostienen que uno de los problemas que, en general, se presentan en la enseñanza y aprendizaje de la matemática en todos los niveles educativos, es el relativo al aprendizaje del lenguaje algebraico. Es su propia cualidad de lenguaje la que proporciona una de las mayores dificultades debido fundamentalmente a su grado de abstracción, la utilización de símbolos para representarla, sus características sintácticas de notación, signos de operación, utilización de paréntesis, sentido y uso de las letras, etc. El mayor rechazo corresponde al Álgebra por las dificultades de comprensión y la íntima relación entre los distintos temas.

La única finalidad que nos ha motivado a preparar este formulario se reduce a exponer al estudiante las temidas matemáticas bajo un aspecto más atractivo, a familiarizarse del modo más simple con las definiciones, propiedades, teoremas, fórmulas y artificios y facilitar la tarea del estudiante. Dicho de otra manera nuestro propósito se reduce a guiar al estudiante en un paseo más ordenado y lógico por el maravilloso mundo del álgebra.

Creemos que hemos escrito todo lo que un alumno debe saber después de un buen aprovechamiento del curso de álgebra. Tentados en algunas ocasiones por profundizar más determinados conceptos. Hemos querido escribir exclusivamente lo que los docentes procuramos hacer en clases y, lo que un estudiante de educación media debería saber.

FOR AUTHOR USE ONLY

Simbología Matemática

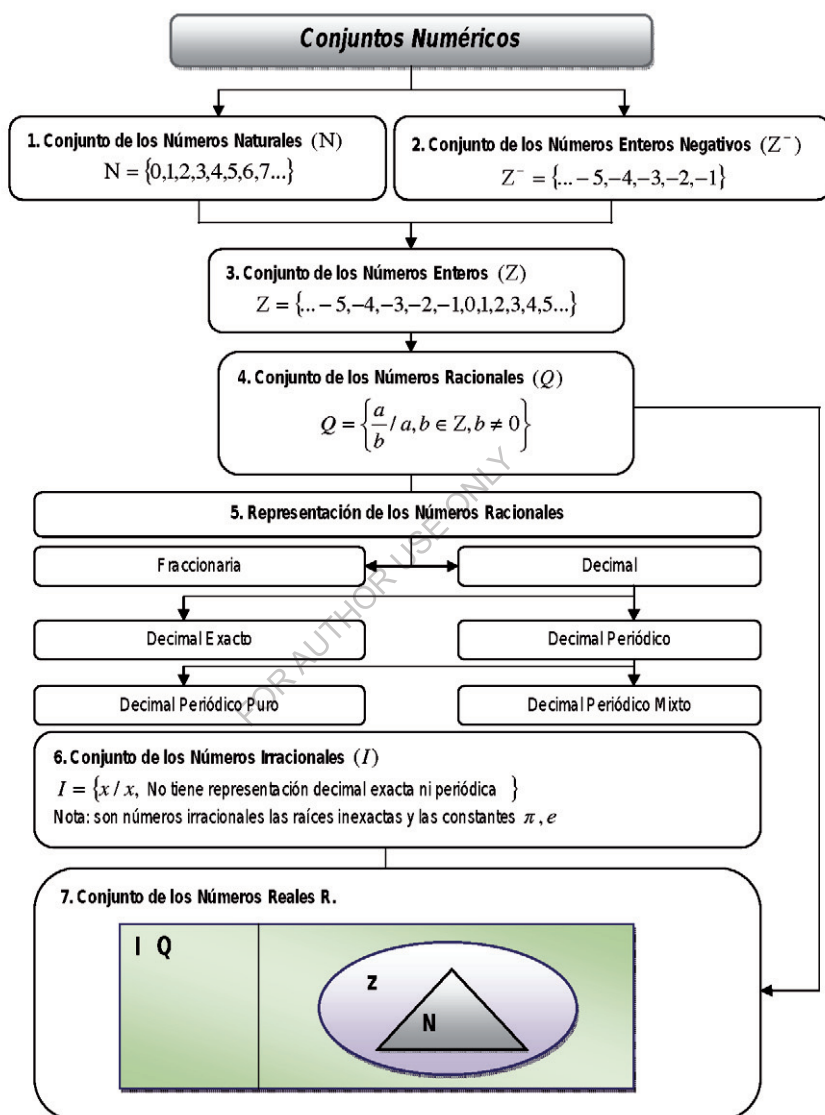
Símbolo	Significado
$<$	Es menor que
$>$	Es mayor que
$\leq$	Es menor o igual que
$\geq$	Es mayor o igual que
$\perp$	Es perpendicular
$\wedge$	y
$\vee$	o
$\angle$	Ángulo
$\subset$	Contenido en
$\forall$	Para todo
$\Rightarrow$	Implica
$\Leftrightarrow$	Si y sólo si (doble implicancia)
$=$	Es igual a
$\neq$	Es diferente de, es distinto de
$\equiv$	Es equivalente a
$\cong$	Es congruente con
$\in$	Pertenece a
$\notin$	No pertenece a
$\exists$	Existe
$\cup$	Unión entre conjuntos
$\cap$	Intersección entre conjuntos
$\therefore$	Por consiguiente
Σ	Sumatoria
$\int$	integral
$ $	Valor absoluto
$ $	Máximo entero
$\iint$	Integral doble
$\iiint$	Integral triple
$\prod$	Productoria
$()$	Paréntesis
$[]$	Corchetes
$\{ \}$	Llaves
$\subseteq$	Esta incluido estrictamente
ϕ	Conjunto Vacío

Notación Matemática

$\alpha; \beta; \gamma; \theta$	Ángulos (planos)
$L; l$	Longitud
b	Anchura
h	Altura
$r; R$	Radio
$d; D$	Diámetro
$2p$	Perímetro
p	Semiperímetro
$A; S$	Área
A_L	Área lateral
A_T	Área total
V	Volumen
t	Tiempo
v	Velocidad
a	Aceleración
f^{-1}	Función inversa
$(f \circ g)$	Composición de funciones
$M(\bar{x}; \bar{y})$	Punto medio
$P(x; y)$	Punto P cualquiera
C	Centro
m_e	Mediana
b_i	Bisectriz interior
b_e	Bisectriz exterior
$\overline{PQ}$	Segmento PQ
$\hat{i}$	Ángulo interior
$\hat{e}$	Ángulo exterior
S°	Grados sexagesimales
C°	Grados centesimales
$Rrad$	Radianes
$\bar{X}$	Media
m	Pendiente
$d[A; B]$	Distancia entre los puntos A y B
$d[\ell; P]$	Distancia de la recta ℓ al punto P

Lenguaje Algebraico

Lenguaje Algebraico	Lenguaje Cotidiano
$+$	Más, suma, adición, añadir, aumentar
$-$	Menos, diferencia, disminuido, exceso, restar
$\cdot$	De, del, veces, producto, por, factor
$:\div$	División, cociente, razón, es a
$=$	Igual, resulta, se obtiene, equivale a
x	Un número cualquiera
$x+1$	Sucesor de un número
$x-1$	Antecesor de un número
$2x$	Doble de un número, duplo, dos veces, número par, Múltiplo de dos
$3x$	Triple de un número, triplo, tres veces, múltiplo de tres
$4x$	Cuádruplo de un número
x^2	Cuadrado de número
x^3	Cubo de un número
$\frac{1}{2}x$ ó $\frac{x}{2}$	Mitad de un número, un medio de
$\frac{1}{3}x$ ó $\frac{x}{3}$	Tercera parte de un número, un tercio de
$\frac{1}{x}$	Inverso multiplicativo
$2x+1$ ó $2x-1$	Número impar
$\frac{x+y}{2}$	Semi suma de dos números
$\frac{x-y}{2}$	Semi diferencia de dos números
$x; x+1, x+2, x+3, x+4, \dots$	Números consecutivos
$2x; 2x+2, 2x+4, 2x+6, 2x+8, \dots$	Números pares consecutivos
$2x+1, 2x+3, 2x+5, 2x+7, \dots$	Números impares consecutivos
$4x; 4x+4, 4x+8, 4x+12, \dots$	Múltiplos consecutivos de 4
$5x; 5x+5, 5x+10, 5x+15, \dots$	Múltiplos consecutivos de 5
$\frac{x}{y} = k$	x es directamente proporcional a y
$x \cdot y = k$	x es inversamente proporcional a y



Conjunto de los Números Racionales

1. Conjunto de los Números Racionales (Q)

$$Q = \left\{ \frac{a}{b} / a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

Nota: a/b ; es una fracción.

2. Clasificación de las fracciones

3. Por sus términos:

3.1. Fracción irreducible.

$\frac{a}{b}$; es irreducible, si a y b son PESI.

Ejemplo: $\frac{3}{7}; \frac{11}{2}; \frac{5}{9}; \frac{11}{19}; \frac{2}{17}; \frac{3}{11}$

3.2. Fracción reducible.

Si: a y b tienen divisores comunes.

Ejemplo $\frac{10}{24}; \frac{8}{64}; \frac{6}{48}; \frac{25}{100}; \frac{12}{36}; \frac{8}{64}$

3.3. Fracciones equivalentes.

Son fracciones que tienen un mismo valor $\frac{a}{b} \diamond \frac{ak}{bk}$

4. Por la comparación de sus términos.

4.1. Fracción propia.

$\frac{a}{b}$; Es una fracción propia si:

$a < b, \left[\frac{a}{b} \right] < 1$; Ejemplo: $\frac{2}{7}; \frac{5}{11}; \frac{21}{52}; \frac{13}{50}$

4.2. Fracción impropia.

$\frac{a}{b}$; Es una fracción propia si:

$a > b, \left[\frac{a}{b} \right] > 1$; Ejemplo: $\frac{12}{7}; \frac{22}{3}; \frac{6}{5}; \frac{38}{11}$

Nota: $A \frac{m}{n} = \frac{An + m}{n}$, fracción mixta

Clasificación de los Números Racionales

1. Conjunto de los Números Racionales (Q)

$$Q = \left\{ \frac{a}{b} / a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

Nota: a/b ; es una fracción.

2. Clasificación de las fracciones

3. Por su denominador:

3.1. Fracción decimal.

$\frac{a}{b}$: Es una fracción decimal, si: $b = 10^n$; b múltiplo de una potencia de 10.

Ejemplo: $\frac{3}{100}$; $\frac{11}{1000}$; $\frac{5}{10}$; $\frac{23}{100000}$; $\frac{2}{10^4}$; $\frac{48}{10^{10}}$

3.2. Fracción ordinaria.

$\frac{a}{b}$: Es una fracción ordinaria, si en: $\frac{a}{b}$; $b \neq 10^n$; diferente de una potencia de 10.

Ejemplo: $\frac{22}{38}$; $\frac{14}{52}$; $\frac{18}{104}$

4. Por el grupo de fracciones.

4.1. Fracciones homogéneas.

Son aquellas fracciones que tienen denominadores iguales.

$$\frac{m}{A}; \frac{q}{A}; \frac{r}{A}; \frac{t}{A}; \frac{y}{A} \dots$$

Ejemplo: $\frac{3}{11}$; $\frac{7}{11}$; $\frac{27}{11}$; $\frac{34}{11}$; $\frac{56}{11}$; $\frac{21}{11}$; $\frac{35}{11}$; $\frac{85}{11}$...

2.2. Fracciones heterogéneas.

Son aquellas fracciones que tienen denominadores diferentes.

$$\frac{m}{A}; \frac{q}{B}; \frac{r}{C}; \frac{t}{D}; \frac{y}{E} \dots$$

Ejemplo: $\frac{1}{3}$; $\frac{4}{7}$; $\frac{11}{10}$; $\frac{17}{12}$; $\frac{23}{39}$; $\frac{25}{17}$; $\frac{19}{23}$; $\frac{52}{41}$...

Fracción Generatriz de un Decimal

1. Decimal Exacto: La manera de pasar este tipo de decimales a fracción es simplemente escribir una fracción cuyo numerador sea el mismo número pero sin coma, y cuyo denominador sea 10000. . . Con tantos ceros como dígitos tiene el número después de la coma, por ejemplo:

$$0, a = \frac{a}{10}; 0, ab = \frac{ab}{100}; 0, abc = \frac{abc}{1000}; 0, abcd = \frac{abcd}{10000}$$

$$a, b = \frac{ab}{10}; a, bc = \frac{abc}{100}; a, bcd = \frac{abcd}{1000}; a, bcde = \frac{abcde}{10000}$$

Generalizando:

$$0, \underbrace{abcde \dots xyz}_{n-\text{cifras}} = \frac{\overline{abcde \dots xyz}}{10^n}; a, \underbrace{bcdef \dots xyz}_{n-\text{cifras}} = \frac{\overline{abcdef \dots xyz}}{10^n}$$

2. Decimal Periódico

2.1. Decimal Periódico Puro.

La generatriz de una fracción periódica pura, tiene como numerador al periodo y como denominador tantos nueves como cifras del periodo.

$$0, aaaaaa \dots = \frac{a}{9}; 0, abababab \dots = \frac{ab}{99}; 0, abcabcabc \dots = \frac{abc}{999}$$

$$a, bbbbbb \dots = \frac{ab - a}{9}; a, bcbcbc \dots = \frac{abc - a}{99}; ab, cdecdecde \dots = \frac{abcde - ab}{999}$$

Generalizando:

$$0, \underbrace{abcd \dots xyz}_{n-\text{cifras}} = \frac{\overline{abcd \dots xyz}}{\underbrace{9999 \dots 999}_{n-\text{cifras}}}; ab, \underbrace{cdef \dots xyz}_{n-\text{cifras}} = \frac{\overline{abcd \dots xyz - ab}}{\underbrace{9999 \dots 999}_{n-\text{cifras}}}$$

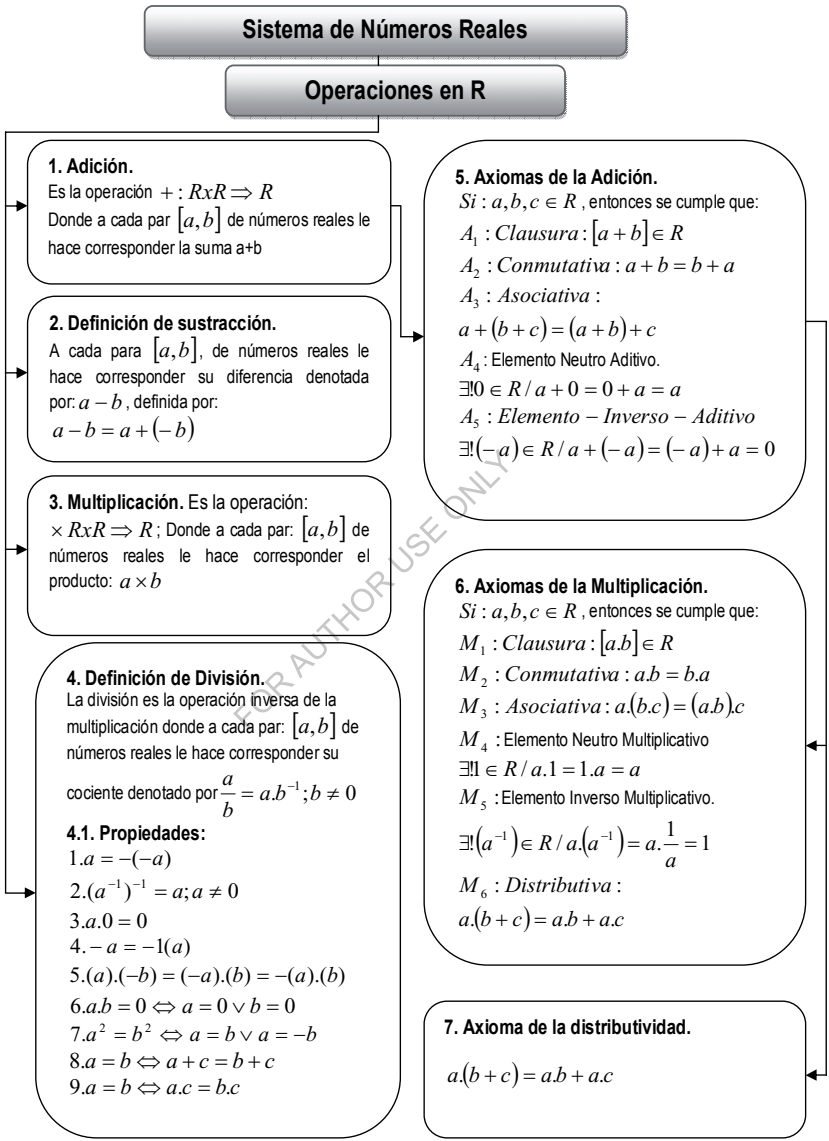
2.2. Decimal Periódico Mixto.

La generatriz de una fracción periódica mixta, tiene como numerador la parte no periódica seguida de un periodo; menos la parte no periódica. Como denominador tiene tantos nueves como cifras tiene la parte periódica seguida de tantos ceros como cifras tiene la parte no periódica.

$$0, abbbbbb \dots = \frac{ab - a}{90}; a, bcdddddd \dots = \frac{abcd - abc}{900}; ab, cdddd \dots = \frac{abcd - abc}{90}$$

Generalizando:

$$a, \underbrace{bcd \dots xyz}_{m-\text{cifras}} \underbrace{ABC \dots XYZ}_{n-\text{cifras}} = \frac{\overline{abcd \dots xyzABC \dots XYZ - abcd \dots xyz}}{\underbrace{999 \dots 999}_{n-\text{cifras}} \underbrace{000 \dots 000}_{m-\text{cifras}}}$$



Teoría de Exponentes

1. Potenciación: Es la operación que consiste en repetir una cantidad llamada base, tantas veces como factor como lo indica otra llamada exponente.

2. Definición:

$Si : a \in R \wedge n \in Z^+$

$$a^n = \underbrace{a.a.a.a.a.a\dots a}_{n-\text{factores}}$$

Donde:

a = Es la base; n = es el exponente

a^n = Es la n -ésima potencia

3. Leyes de signos

$$3.1. [+ A]^{2n} = + \quad 3.2. [+ A]^{2n+1} = +$$

$$3.3. [- A]^{2n} = + \quad 3.4. [- A]^{2n+1} = -$$

4. Propiedades $Si : a \wedge b \in R; m \wedge n \in N$

$$4.1. a^m a^n = a^{m+n}$$

$$4.2. \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$4.3. [a^m]^n = a^{m \times n}$$

$$4.4. [abcd]^n = a^n \cdot b^n \cdot c^n \cdot d^n$$

$$4.5. \left[\frac{a}{b} \right]^n = \frac{a^n}{b^n}; b \neq 0$$

$$4.6. a^0 = 1$$

$$4.7. 0^n = 0; n \neq 0$$

$$4.8. a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$4.9. \left[\frac{a}{b} \right]^{-n} = \left[\frac{b}{a} \right]^n; a, b \neq 0$$

Propiedades de la Teoría de Exponentes

1. Propiedades adicionales:

$$\text{Si : } a \wedge b \in \mathbb{R}; m \wedge n \in \mathbb{N}$$

$$1.1. a^{b^{c^d}} = a^{b^m} = a^n = p$$

$$\text{Donde: } c^d = m; b^m = n; a^n = p$$

$$1.2. x^{x^{x^{...a}}} = n \Rightarrow x = \sqrt[n]{n}$$

1.3. Exponente – Fraccionario.

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

$$1.4. \left\{ b \left[c(a)^m \right]^n \right\}^p = b^p \cdot c^{n \cdot p} \cdot a^{m \cdot n \cdot p}$$

$$1.5. \left[b^{m^{n^p}} \right]^x = b^{m^{n^p} \cdot x} = b^{x \cdot m^{n^p}} = (b^x)^{m^{n^p}}$$

$$1.6. \left[b^{m^{n^p}} \right]^m = b^{m^{n^p} \cdot m} = b^{m^{n^p+1}}$$

$$1.7. \left[a^{b^{c^d}} \right]^{-1} = a^{-b^{c^d}}$$

$$1.8. \left[(b^{m^x})^{m^y} \right]^{m^z} = b^{m^{x+y+z}}$$

$$1.9. 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x}; 0 < x < 1$$

$$1.10. \sqrt[q]{a^q} \sqrt[q]{b^r} \sqrt[q]{c^s} = a^{q/m} \cdot b^{r/m \cdot n} \cdot c^{s/mnp}$$

$$1.11. \sqrt[p]{a^{\frac{q}{r}}} = a^{\frac{q \cdot r}{p \cdot s}}$$

$$1.12. a^{b^c} = b^{\sqrt[c]{a}}$$

$$1.13. a^{-b^c} = b^{\sqrt[c]{a}}$$

$$1.14. x^{x^x} = a^{a^a} \Rightarrow x = a$$

Ecuaciones Exponenciales

1. Ecuaciones Exponenciales:

Son aquellas ecuaciones que se caracterizan por tener la incógnita en el exponente de una potencia, pudiendo también encontrarse como base de la potencia, para su resolución se utilizará la teoría de exponentes y radicales. Ejemplos:

$$3^x = 243$$

$$\sqrt[3]{2^{x+2}} \sqrt{2^{x+1}} \sqrt[3]{2^x} = 1$$

2. Propiedades. Si : $a \wedge b \in \mathbb{R}; m \wedge n \in \mathbb{N}$

$$2.1. a^m a^n = a^{m+n}$$

$$2.2. \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$2.3. [a^m]^n = a^{m \times n}$$

$$2.4. [abcd]^n = a^n \cdot b^n \cdot c^n \cdot d^n$$

$$2.5. \left[\frac{a}{b} \right]^n = \frac{a^n}{b^n}; b \neq 0$$

$$2.6. a^0 = 1$$

$$2.7. 0^n = 0; n \neq 0$$

$$2.8. a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$2.9. \left[\frac{a}{b} \right]^{-n} = \left[\frac{b}{a} \right]^n; a, b \neq 0$$

$$2.10. a^{b^c d} = a^{b^m} = a^n = p$$

Donde: $c^d = m; b^m = n; a^n = p$

3. Equivalencias Usuales:

$$3.1. \sqrt{2}^{-\sqrt{2}} \diamond (1/2)^{(1/2)^{(1/2)}}$$

$$3.2. 2^{-\sqrt{2}} \diamond (1/4)^{(1/4)^{(1/4)}}$$

$$3.3. \left(\frac{1}{2} \right)^{\left(\frac{1}{2} \right)} \diamond \left(\frac{1}{4} \right)^{\left(\frac{1}{4} \right)}$$

Resolución de una Ecuación Exponencial

1. Propiedades para la resolución de ecuaciones exponenciales:

1.1. Por igualdad de bases.

$$a^x = a^y \Rightarrow x = y \Leftrightarrow a > 0 \wedge a \neq 1$$

1.2. Por igualdad de exponentes.

$$a^x = b^x \Rightarrow a = b \Leftrightarrow a > 0 \wedge b > 0$$

1.3. Por igualdad de base y exponente.

$$x^{x^a} = a^{a^a} \Rightarrow x = a \Leftrightarrow a \neq 0 \wedge 1$$

$$x^{x^{\dots x}} = n \Rightarrow x = \sqrt[n]{n}$$

$$\sqrt[a]{b}^{\sqrt[a]{b}} = \sqrt[x]{y}^{\sqrt[x]{y}} \Rightarrow a = x \wedge b = y$$

$$x = \sqrt[a]{a}^{\sqrt[a]{a}^{\sqrt[a]{a} \dots a}} \Rightarrow x = a$$

$$\left(x^{1/x}\right)\left(x^{1/x}\right)\left(x^{1/x}\right)^{-\alpha}=x$$

2. Por analogía de sus términos.

$$2.1.a^{a \pm n} = b^{b \pm n} \Rightarrow a = b$$

Ejemplo:

$$a^b.b^a = 2^{2^{0,5}}; \text{Hallar: } a.b$$

$$a^b \cdot b^a = 2^{\sqrt{2}} \Rightarrow a^b \cdot b^a = \sqrt{2}^{2\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$a^b \cdot b^a = \sqrt{2}^{\sqrt{2} + \sqrt{2}}$$

$$a^b \cdot b^a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2}^{\sqrt{2}} \Rightarrow a = \sqrt{2} \wedge b = \sqrt{2}$$

3. Pasos para resolver una ecuación exponencial.

3.1. Transformar en potencias de bases iguales.

3.2. Igualar los exponentes.

3.3. Resolver la nueva ecuación.

4. Inecuaciones Exponenciales.

4.1. Si : $b^{f(x)} < b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x); b > 1$

4.2.Si : $b^{f(x)} > b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x); b > 1$

4.3. Si : $b^{f(x)} < b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x); 0 < b < 1$

4.4. Si: $b^{f(x)} > b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x); 0 < b < 1$

Polinomios en R

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$$

$$\forall n \in \mathbb{N}; a_0; a_1; a_2; a_3; \dots; a_n \in R$$

1. Término algebraico: Expresión algebraica que carece de las operaciones de adición y sustracción. Ejemplo:

$$p(x, y, z) = \frac{1}{5}abx^2y^7z^8$$

$$h(x, y, z) = \frac{3}{7}\sqrt[3]{y^4x} \times \sqrt{xy}$$

2. Elementos de un término algebraico:

$$H(x, y, z) = -\frac{1}{2}\sqrt[3]{7}x^{12} \cdot y^5 \cdot z^9$$

- ❖ $-\frac{1}{2}\sqrt[3]{7}$ = Coeficiente
- ❖ x, y, z = Variables
- ❖ $12; 5; 9$ = Exponentes

3. Términos semejantes: Dos o más términos son semejantes si estos contienen la misma parte variable (literal). Ejemplos:

$$T_1 = (x, y, z) = -21bx^3y^7z^{11}$$

$$T_2 = (x, y, z) = (3/7)abcx^3y^7z^{11}$$

$T_1 \wedge T_2$ Son semejantes; a, b, c son constantes.

4. Valor numérico: Es el valor que se obtiene al reemplazar las variables de una expresión por valores numéricos determinados: ejemplo.

Ejemplos:

Si: $P(x) = 5x^2 - 3$, hallemos $P(1)$. Para lo cual será necesario efectuar el siguiente cambio:

$x = 1$ en la identidad. $P(1) = 5(1)^2 - 3$

$$\Rightarrow P(1) = 2$$

$$A(x, y, z) = \sqrt{x+2} \cdot \frac{1}{y-3} + z^3$$

Para : $x = 2; y = 2; z = 3$

$$A(2, 2, 3) = \sqrt{2+2} + \frac{1}{2-3} + 3^3 = 28$$

Grado de un Polinomios en R

1. Grado de un monomio: Ejemplo.

$$P(x, y, z) = \frac{1}{4} x^{10} \cdot y^{12} \cdot z^8$$

Grado absoluto: GA=10+12+8=30

Grado relativo: GR

GR_x=10; GR_y=12; GR_z=8

GR_x= grado relativo con respecto a x.

2. Grado de un polinomio: Ejemplo.

$$T(x, y, z) = \underbrace{x^6 \cdot y^3}_9 + \underbrace{2 \cdot x^3 \cdot y^7 \cdot z^{11}}_{21} + \underbrace{y^4}_4$$

GA de términos el > de 9, 21 y 4

GA=21

Grados relativos:

GR_x=6; GR_y=7; GR_z=4

3. Cambio de Variable: Las variables de una expresión pueden ser sustituidas por cualquier otra variable o expresión. Veamos un ejemplo:

Si: $P(x) = 2x - 1 \wedge Q(x) = x + 1$, hallemos $P[Q(x)]$. Para lo cual debemos sustituir : x por Q(x) en P(x): $P(x) = 2x - 1$. Reemplazando

$P[Q(x)] = 2Q(x) - 1$ pero $Q(x) = x + 1$. Ahora:

$$P[Q(x)] = 2(x + 1) - 1 = 2x + 1$$

4. Observaciones: Tener en cuenta lo siguiente:

4.1. Todo número real es un polinomio, al cual se le podrá denominar: constante polinómica o constante monómica.

4.2. Todos los polinomios tienen un grado definido a excepción del polinomio cero (idénticamente nulo) para el cual el grado no se encuentra definido.

4.3. A todo polinomio se le podrá asignar un nombre particular, este nombre dependerá de la cantidad de términos que presente.

$P(x) = 5x^7$; 1 término se le llama "Monomio".

$P(x) = 3x^2 - \sqrt{2}$; 2 términos se le llama "Binomio".

$P(x) = x^3 - 5x + 1$; 3 términos se llama "Trinomio".

Operaciones con Polinomios en R

1. Operaciones con Polinomios

Si: $P(x)$; es un polinomio de grado " m ", y $Q(x)$ es un polinomio de grado " n ", con $m > n$

Operación	Notación	Grado resultante
Adición	$P(x) + Q(x)$	m
Sustracción	$P(x) + (-Q(x))$	m
Multiplicación	$P(x) \cdot Q(x)$	$m + n$
División	$\frac{P(x)}{Q(x)}$	$m - n$
Radicación	$\sqrt[k]{P(x)}$	m / k

2. Polinomios importantes:

2.1. Polinomio homogéneo: Polinomio que tiene todos sus términos del mismo grado. Ejemplo.

$$P(x) = x^3 y^7 - 3x^5 y^5 + 2x^8 y^2$$

2.2. Polinomios idénticos: ($\equiv$) : Dos polinomios reducidos del mismo grado y con las mismas variables, serán idénticos si los coeficientes de sus términos semejantes en ambos son iguales. Ejemplo.

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d; Q(x) = Ax^3 + Bx^2 Cx + D$$

$$P(x) \equiv Q(x) \Leftrightarrow a = A; b = B; c = C \wedge d = D$$

2.3. Polinomio idénticamente nulo: ($\equiv 0$) Todo polinomio reducido, e idénticamente nulo debe tener todos sus coeficientes iguales a cero, sea:

$$P(x, y) = Ax^4 + Bx^3 y + Cx^6 y^8 + Dy^{20}; P(x, y) \equiv 0 \Leftrightarrow A = B = C = D = 0$$

2.4. Polinomio ordenado: Aquel polinomio donde los exponentes de una determinada variable sólo aumente o disminuye en cada término: $P(x, y) = x^7 y + x^4 y^2 - xy^5$

Es ordenado en forma decreciente con respecto a x .

Es ordenado en forma creciente con respecto a x .

2.5. Polinomio completo: Aquel polinomio que tiene al menos una variable en todos sus términos que posee todos los exponentes naturales desde el número mayor hasta el exponente cero. Ejemplo.

$$P(t) = 4t^6 + t^5 - 3t^4 + 7t^3 + t^2 + t + 1; N^0 \text{ términos} = GR + 1; G_{ik} - G_{ik-1} = 1$$

$$\sum \text{Coeficientes} = P(1); T_i = P(0)$$

2.6. Polinomio Mónico: Un polinomio de una variable es mónico si y sólo si su coeficiente principal es la unidad: $P(r) = r^4 + 3r^3 - 9r - 20$

Raíz Cuadrada de Polinomios

1. Procedimiento:

- 1.1. Se ordena, completa y se agrupan de dos en dos los términos, empezando por el último con respecto a la letra ordenatriz.
- 1.2. Se extrae la raíz cuadrada del primer término, el cual representa el primer término de la raíz.
- 1.3. Se eleva al cuadrado el término obtenido, se le cambia de signo y se suma el polinomio dado, eliminándose la primera columna.
- 1.4. Se bajan los dos términos del siguiente grupo para hallar el segundo término de la raíz. Se divide el primer término de los bajados entre el doble del primer término de la raíz hallada con su propio signo y todo se multiplica por el mismo con signo cambiado, los términos obtenidos se escriben debajo de sus semejantes de los que han sido bajados.
- 1.5. Así se continúa dividiendo siempre el primer término del residuo entre el doble del primer término de la raíz hallada; hasta obtener un resto cuyo grado sea una unidad menor que el grado de la raíz de un polinomio idénticamente nulo.

Ejemplo:

Hallar la raíz cuadrada del siguiente polinomio:

$P(x) = 9x^4 + 12x^3 - 49 + 28x - 38x^2$

Solución:

P(x) es de grado par.

Grado de la raíz:

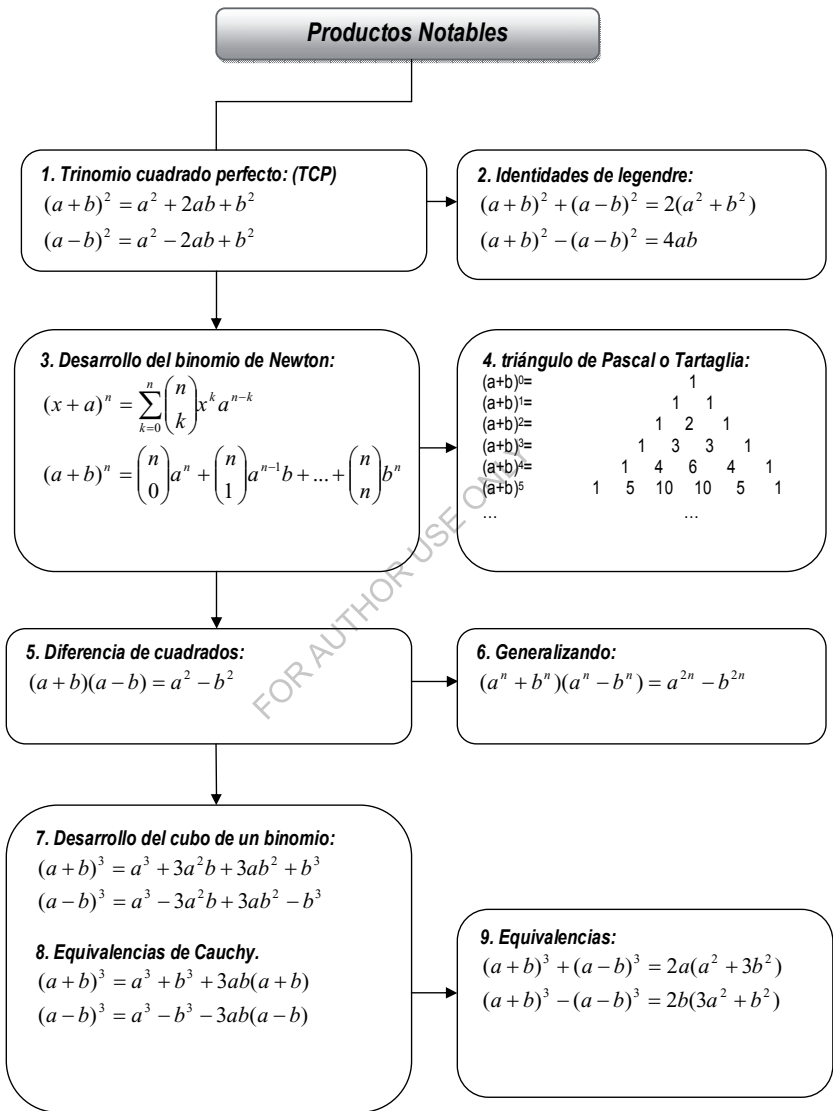
$\frac{4^o}{2} = 2^o$

Grado del resto:

$r^o - 1 = R^o = 1^o$

Primero ordenamos al polinomio en forma decreciente:

$\begin{array}{r} \sqrt{9x^4 + 12x^3 - 38x^2 + 28x - 49} \\ -9x^4 \\ \hline 12x^3 - 38x^2 \\ -12x^3 - 4x^2 \\ \hline -42x^2 + 28x - 49 \\ 42x^2 + 28x - 49 \\ \hline 56x - 98 \\ \text{Resto} \end{array}$	$\begin{array}{l} 3x^2 + 2x - 7 \\ \hline 1^o \text{ raíz} = \sqrt{9x^4} = 3x^2 \\ (3x^2)^2 = 9x^4 \\ \hline 2^o \text{ raíz} = \frac{12x^3}{2(3x^2)} = 2x \\ \Rightarrow (2(3x^2) + 2x)(-2x) \\ \hline 3^o \text{ raíz} = \frac{-42x^2}{2(3x^2)} = -7 \\ \Rightarrow (2(3x^2 + 2x) - 7)(+7) \end{array}$
---	---



Productos Notables Especiales

1. Suma y diferencia de cubos:

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

2. Generalizando.

$$(a^n + b^n)(a^{2n} - a^n b^n + b^{2n}) = a^{3n} + b^{3n}$$

$$(a^n - b^n)(a^{2n} + a^n b^n + b^{2n}) = a^{3n} - b^{3n}$$

3. Productos de Stevin:

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + a.b$$

$$(x + a)(x - b) = x^2 + (a - b)x - a.b$$

$$(x - a)(x - b) = x^2 - (a + b)x + a.b$$

$$(ax + b)(cx + d) = acx^2 + (ad + bc)x + b.d$$

$$(ax - b)(cx + d) = acx^2 + (ad - bc)x - b.d$$

$$(ax - b)(cx - d) = acx^2 - (ad + bc)x + b.d$$

$$(x + a)(x + b)(x + c) = x^3 + (a + b + c)x^2 + (a.d + a.c + b.c)x + a.b.c$$

4. Equivalencias de Argand:

$$(a^{2m} + a^m b^n + b^{2n})(a^{2m} - a^m b^n + b^{2n}) = a^{4m} + a^{2m} b^{2n} + b^{4n}$$

5. Identidades de Lagrange.

$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (ax + by)^2 + (ay - bx)^2$$

$$(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) = (ax + by + cz)^2 + (ay - bx)^2 + (az - cx)^2 +$$

$$(bz - cy)^2$$

6. Equivalencias Adicionales.

$$(a + b)(b + c)(a + c) + a.b.c = (a + b + c)(a.b + b.c + a.c)$$

$$ab(a + b) + b.c(b + c) + a.c(a + c) = (a + b)(b + c)(a + c) - 2a.b.c$$

7. Equivalencia de GAUSS.

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3.a.b.c = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - (a.b + b.c + a.c))$$

Productos Notables de un Trinomio al Cuadrado

1. Trinomio al cuadrado:

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2.ab + 2.ac + 2.bc$$

$$(a+b-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2.ab - 2.ac - 2.bc$$

$$(a-b-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2.ab - 2.ac - 2.bc$$

También:

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+ac+bc)$$

2. Trinomio al cubo:

$$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3.ab(a+b) + 3.bc(b+c) + 3.ac(a+c) + 6.a.b.c$$

$$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b)(b+c)(a+c)$$

$$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b+c)(ab+bc+ac) - 3.a.b.c$$

$$(a+b+c)^3 = 3(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) - 2(a^3+b^3+c^3) + 6.a.b.c$$

3. Observación: Para la resolución de algunos ejercicios será necesario tener en cuenta a estas dos relaciones.

$$\frac{(a+b)^2 + (b+c)^2 + (a+c)^2}{2} = a^2 + b^2 + c^2 + a.b + b.c + a.c$$

$$\frac{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (a-c)^2}{2} = a^2 + b^2 + c^2 - a.b - b.c - a.c$$

4. Observación: $\forall n \in \mathbb{N}$; cumple que:

$$(a-b)^{2n} = (b-a)^{2n}$$

$$(a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}.b + a^{n-3}.b^2 + a^{n-4}.b^3 + \dots + a.b^{n-2} + b^{n-1}) = a^n - b^n, \forall n \in \mathbb{Z}^+$$

$$(a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}.b + a^{n-3}.b^2 - a^{n-4}.b^3 + \dots - a.b^{n-2} + b^{n-1}) = a^n + b^n, \forall n \in \mathbb{Z}^+ \text{ impar.}$$

Productos Notables Condicionales

1. Equivalencias condicionales:

Si : $a + b + c = 0$; Entonces se cumple:

$$1.1. a^2 + b^2 + c^2 = -2(ab + bc + ac)$$

$$1.2. a^3 + b^3 + c^3 = 3.a.b.c$$

$$1.3. (ab + ac + bc)^2 = a^2.b^2 + a^2.c^2 + b^2.c^2$$

$$1.4. a^4 + b^4 + c^4 = 2(a^2.b^2 + a^2.c^2 + b^2.c^2) = \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{2}$$

$$1.5. a^5 + b^5 + c^5 = -5abc(ab + ac + bc)$$

$$1.6. a^6 + b^6 + c^6 = 3(a.b.c)^2 - 2(ab + bc + ac)^3$$

$$1.7. a^7 + b^7 + c^7 = 7.a.b.c(ab + ac + bc) = \left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} \right) \left(\frac{a^5 + b^5 + c^5}{5} \right)$$

$$1.8. a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc ; \text{ Donde: } a, b, c \in R ; \text{ se demuestra que:}$$

$$a = b = c = \text{constante}$$

2. Casos especiales en $\mathbb{R}$.

$$2.1. a^2 + b^2 + c^2 + \dots + n^2 = 0$$

Será posible sólo si:

$$a = b = c = \dots = n = 0$$

$$\text{Si : } \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \dots + \sqrt{n} = 0$$

Será posible sólo si:

$$a = b = c = \dots = n = 0$$

En general:

$$\text{Si : } a^{2n} + b^{2n} + c^{2n} + \dots + m^{2n} = 0 \vee$$

$$\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} + \sqrt[n]{c} + \dots + \sqrt[n]{m} = 0$$

Donde: $n \in \mathbb{N}$; es posible sólo si:

$$a = b = c = \dots = m = 0$$

División de polinomios

1. División Algebraica.

1.1. División Exacta.

Dados dos polinomios $f(x)$ y $g(x)$ de grados no nulos se dirá que $f(x)$ es divisible por $g(x)$ si existe un único polinomio $h(x)$, tal que se verifique la identidad de división exacta.

$f(x)$ Es divisible por $g(x) \Leftrightarrow$

$$\exists h(x); f(x) = g(x) \cdot h(x)$$

1.2. División inexacta.

Dados los polinomios $D(x)$ y $d(x)$ de grados positivos. La división denotada por $D(x) \div d(x)$ o

$\frac{D(x)}{d(x)}$ es una operación algebraica que consiste en hallar otros dos únicos polinomios $q(x)$ y

$R(x)$, tal que:

$$D(x) \equiv d(x) \cdot q(x) + R(x)$$

Donde:

$D(x)$ = Polinomio dividendo

$d(x)$ = Polinomio divisor

$Q(x)$ = Polinomio cociente

$R(x)$ = Polinomio residuo

j...**Importante...**!

$$^{\circ}[D(x)] \geq ^{\circ}[d(x)] \geq 1$$

$$^{\circ}[R(x)] < ^{\circ}[d(x)] \vee R(x) \equiv 0$$

1.3. Teorema del factor.

Un polinomio $p(x)$ de grado no nulo se anula para $x = \alpha \Leftrightarrow p(x)$ es divisible por $(x - \alpha)$; luego $(x - \alpha)$ es un factor de $p(x)$

2. Criterio general para dividir.

Para dividir dos polinomios $D(x)$ dividendo y $d(x)$ divisor, ambos deben ser completos y ordenados respecto a su misma variable x , generalmente en forma decreciente. Es decir, esta variable deberá presentar todos sus exponentes desde el mayor hasta el exponente uno; además del término independiente. En caso contrario colocar un cero a cada polinomio deberá ordenarse en forma decreciente y por cada término que faltase.

3. Propiedades de grado.

$$^{\circ}[q(x)] = ^{\circ}[D(x)] - ^{\circ}[d(x)]$$

Si $R(x) \equiv 0$, entonces:

$$\text{Máximo } ^{\circ}[R(x)] = ^{\circ}[d(x) - 1] - 1$$

Teoremas de la División de polinomios

1. Teoremas.

1.1. Teorema 1: Si: $f(x)$ es divisible por $g(x)$ y $g(x)$ es divisible por $h(x)$, entonces $f(x)$ es divisible por $h(x)$.

1.2. Teorema 2: Si $f(x)$ y $g(x)$ son divisibles por $h(x)$, la suma y la diferencia de $f(x)$ y $g(x)$ son divisibles por $h(x)$.

1.3. Teorema 3: Si: $f(x)$ es divisible por $g(x)$, el producto de $f(x)$ por cualquier otro polinomio no nulo $h(x)$ es también divisible por $g(x)$.

1.4. Teorema 4: Si: el polinomio $p(x)$ es divisible separadamente por los binomios $(x-a)$, $(x-b)$ y $(x-c)$ / $a \neq b \neq c$, entonces:

$p(x)$ es divisible por el producto: $(x-a)(x-b)(x-c)$.

1.5. Teorema 5: Si: al dividir un polinomio $p(x)$ entre $(x-a)$, $(x-b)$ y $(x-c)$ / $a \neq b \neq c$, en forma separada deja el mismo resto en cada caso, entonces al dividir dicho polinomio entre $(x-a)(x-b)(x-c)$ dejará el mismo resto común. Así:

$$p(x) \div (x-a) \Rightarrow R_1(x) = R$$

$$p(x) \div (x-b) \Rightarrow R_2(x) = R$$

$$p(x) \div (x-c) \Rightarrow R_3(x) = R$$

$$\Rightarrow p(x) \div (x-a)(x-b)(x-c) \Rightarrow R(x) = R$$

2. Propiedades generales de la división de polinomios.

2.1. El grado del cociente es igual al grado del dividendo menos el grado del divisor: $Q^\circ = D^\circ - d^\circ$

2.2. El grado del residuo es siempre menor que el grado del divisor, su máximo grado es una unidad menor que el grado del divisor (a excepción de los polinomios homogéneos): $R_{\max} = d^\circ - 1$

2.3. El término independiente del dividendo estará determinado por el producto de los términos independientes del divisor y el cociente más el término independiente del residuo.

$$TI_D = TI_D \cdot x TI_Q + TI_R$$

2.4. En la división de dos polinomios homogéneos el cociente y el residuo también son polinomios homogéneos, pero el grado absoluto del dividendo es igual al grado absoluto del residuo.

$$GA_{\text{dividendo}} = GA_{\text{resto}}$$

La disposición del esquema es el siguiente:

coef.de.R(x): Coeficientes del residuo que se obtienen de sumar la columnas finales una vez obtenidos todos los coeficientes.

División de Polinomios: Método de Ruffini

1. Regla de Paolo Ruffini.

Es un caso particular del método de Horner.

Se aplica para dividir un polinomio $D(x)$ entre un divisor que tenga o adopte la forma lineal.

$$d(x) = Ax + B; A \neq B$$

Sean los polinomios:

$$D(x) = a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$$

	$\overbrace{\hspace{1.5cm}}^{\text{coeficiente de } D(x)}$				
$Ax + B = 0$	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4
$x = \frac{-B}{A}$	↓	□	□	□	□
$\div A \rightarrow$	a_0	b_1	b_2	b_3	b_4
	q_0	q_1	q_2	q_3	$\underbrace{b_4}_{\text{Resto}}$
	$\overbrace{\hspace{1.5cm}}^{\text{coef. de } q(x)}$				

$$d(x) = Ax + B$$

2. Pasos a seguir.

(a_0, a_1, a_2, a_3 y a_4) Coeficientes del dividendo ordenado decrecientemente, completo o completado, con respecto a una variable.

$\frac{-B}{A}$: Valor que se obtiene para la variable cuando el divisor se iguala a cero.

(a_0, b_1, b_2, b_3 y b_4) Coeficientes del cociente que se obtienen de sumar cada columna, luego que el coeficiente anterior se ha multiplicado por $(\frac{-B}{A})$, y colocado en la siguiente columna.

(r_0 y r_1) Resto de la división que se obtiene de sumar la última columna

¡...**Observación importante...**!

Si el coeficiente principal del divisor es diferente de la unidad, el cociente obtenido se deberá dividir entre este valor.

División de Polinomios: Teorema del Resto

1. Teorema del resto.

El objetivo es hallar el resto de una división sin efectuarla.

En toda división la forma $P(x) \div (Ax + B)$, el residuo es igual al valor numérico de $P(x)$ cuando

$$x = -\frac{B}{A}$$

Es decir:

$$\frac{P(x)}{Ax + B} \Leftrightarrow \text{resto} = p\left(-\frac{B}{A}\right)$$

Ejemplos:

$$\frac{P(x)}{x-2} \Rightarrow R = P(2)$$

$$\frac{P(x)}{2x+1} \Rightarrow R = P\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{P(x)}{x-\sqrt{3}+\sqrt{2}} \Rightarrow R = P(\sqrt{3}-\sqrt{2})$$

$$\frac{P(x)}{3x+2} \Rightarrow R = P\left(-\frac{2}{3}\right)$$

$$\frac{P(x)}{x+\sqrt{5}-\sqrt{7}} \Rightarrow R = P(\sqrt{7}-\sqrt{5})$$

2. Regla práctica para calcular el resto de una división.

- 2.1. El divisor se iguala a cero.
- 2.2. Se elige una variable conveniente y se despeja esta variable.
- 2.3. La variable elegida se busca en el dividendo para reemplazarla luego se realizan las operaciones indicadas y obtenemos el resto.

División de Polinomios: Casos Especiales

1. Artificios sobre división de polinomios.

1.1. Artificio 1. Considere el siguiente ejemplo:

$$\frac{Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + 27x^2 + 19x + 5}{4x^3 + 3x + 1}$$

Calcular A, B y C, si la división es exacta.

Notemos que las incógnitas aparecen al inicio y aplicar directamente el método de HORNER el trabajo se haría engorroso. Entonces podemos ordenar y completar tanto el dividendo como el divisor en forma creciente y, lograremos que las incógnitas aparezcan ahora al final y los coeficientes numéricos al comienzo es decir:

$$\frac{5 + 19x + 27x^2 + Cx^3 + Bx^4 + Ax^5}{1 + 3x + 0x^2 + 4x^3}$$

Finalmente aplicamos el método de HORNER.

1.2. Artificio 2. Considere el siguiente ejemplo:

$$\frac{mx^4 + nx^3 + px^2 + 6x + 6}{2x^2 - 5x + 2}; \text{ Cuyo resto es: } -5x + 8$$

La suma de coeficientes del cociente es 4.

"Al dividendo le restamos el residuo y efectuamos por HORNER, pero con los términos dispuestos al revés. Con la salvedad que ahora el residuo será cero.

$$\frac{-2 + 11x + px^2 + nx^3 + mx^4}{2 - 5x + 2x^2}$$

Finalmente aplicamos el método de HORNER.

Cocientes Notables

1. Cocientes Notables. Son aquellos cocientes que se pueden obtener en forma directa, sin necesidad de efectuar la operación de división. Se obtienen de divisiones indicadas que presentan la forma:

$$\frac{x^n \pm a^n}{x \pm a}; \text{ Donde "x" y "a", son términos del divisor.}$$

2. Estudio de los casos de los cocientes notables.

$$(a). \frac{x^n - a^n}{x - a}; (b). \frac{x^n + a^n}{x - a}; (c). \frac{x^n + a^n}{x + a}; (d). \frac{x^n - a^n}{x + a}$$

(b) no es cociente notables pues:

Calculo del resto

$$x - a = 0 \Rightarrow x = a$$

$$R = a^n + a^n$$

$$R = 2a^n \neq 0$$

Veamos que en éste caso para cualquier valor de "n" el resto es siempre diferente de cero por lo cual el cociente que se obtiene será siempre un cociente completo y nunca un cociente exacto.

3. Casos.

Según la combinación de signos se puede analizar 4 casos, dando en cada caso un C.N. ya sea entero o completo.

$$\frac{x^n \pm a^n}{x \pm a} = q(x) \Rightarrow r(x) = 0; q(x) = \text{Cociente entero}$$

$$\frac{x^n \pm a^n}{x \pm a} = q(x) + \frac{r(x)}{x \pm a}$$

$$\Rightarrow r(x) \neq 0; q(x) + \frac{r(x)}{x \pm a} =$$

cociente-completo

4. Condición necesaria y suficiente para obtener un cociente notable:

De: $\frac{x^m \pm a^n}{x^p \pm a^q} \Leftrightarrow \frac{m}{p} = \frac{n}{q} = r; r \in \mathbb{Z}^+$; Además r: indica el número de términos del cociente notable.

Cocientes Notables: Término General

1. Fórmula del término general:

De: $\frac{x^n \pm a^n}{x \pm a}$; Un término de lugar k (término cualquiera) de $q(x)$. Viene dado por la relación:

$$T_k = [\text{signo}] x^{n-k} \cdot a^{k-1}; \quad x = \text{Primer término del divisor.} \quad a = \text{Segundo término del divisor.} \quad n = \# \text{ de términos de } q(x)$$

1.1. Regla para determinar el signo.

a). Si: $d(x) = x - a$; Todos los términos del cociente notable son positivos.

b). Si: $d(x) = x + a$; Se tiene.

+ Los de lugar impar y - Los de lugar par.

¡...**Importante**...! Si lo que tú quieres es hallar un término de lugar k cualquiera, contando del término final, entonces utiliza lo siguiente: $T_k = [\text{signo}] x^{k-1} \cdot a^{n-k}$

Por lógica se tendrá que para determinar el signo cuando: $d(x) = x + a$

+ Los de lugar par y - Los de lugar impar.

2. Término central: $\frac{x^n \pm a^n}{x \pm a}$

(a). Si: n , es impar, entonces el único término central estará dado por:

$$T_c = T_k = T_{\frac{n+1}{2}} = [\text{Signo}] x^{\frac{n-1}{2}} \cdot a^{\frac{n-1}{2}}$$

(b). Si n es par: hay dos términos centrales.

$$T_{c1} = T_k = T_{\frac{n}{2}} = [\text{Signo}] x^{\frac{n}{2}} \cdot a^{\frac{n-2}{2}}$$

$$T_{c2} = T_k = T_{\frac{n+2}{2}} = [\text{Signo}] x^{\frac{n-2}{2}} \cdot a^{\frac{n}{2}}$$

2.1 Regla para el signo:

(a). Cuando el divisor es de la forma: $(x - a)$; todos son positivos.

(b). Cuando el divisor es de la forma: $(x + a)$; puede ocurrir.

$$k = N^\circ \text{ impar} \Rightarrow +$$

$$k = N^\circ \text{ par} \Rightarrow -$$

Cocientes Notables: Forma Abreviada

1. Deducción de los cocientes notables.

2. Primer caso: Forma: $\frac{x^n - a^n}{x - a}$

Cociente Notable (CN)	CN expresado con notación sumatoria
$x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + x^{n-4}a^3 + \dots + a^{n-1}$	$\sum_{k=1}^n x^{n-k} a^{k-1}; \forall n$

3. Segundo caso: Forma: $\frac{x^n + a^n}{x + a}$

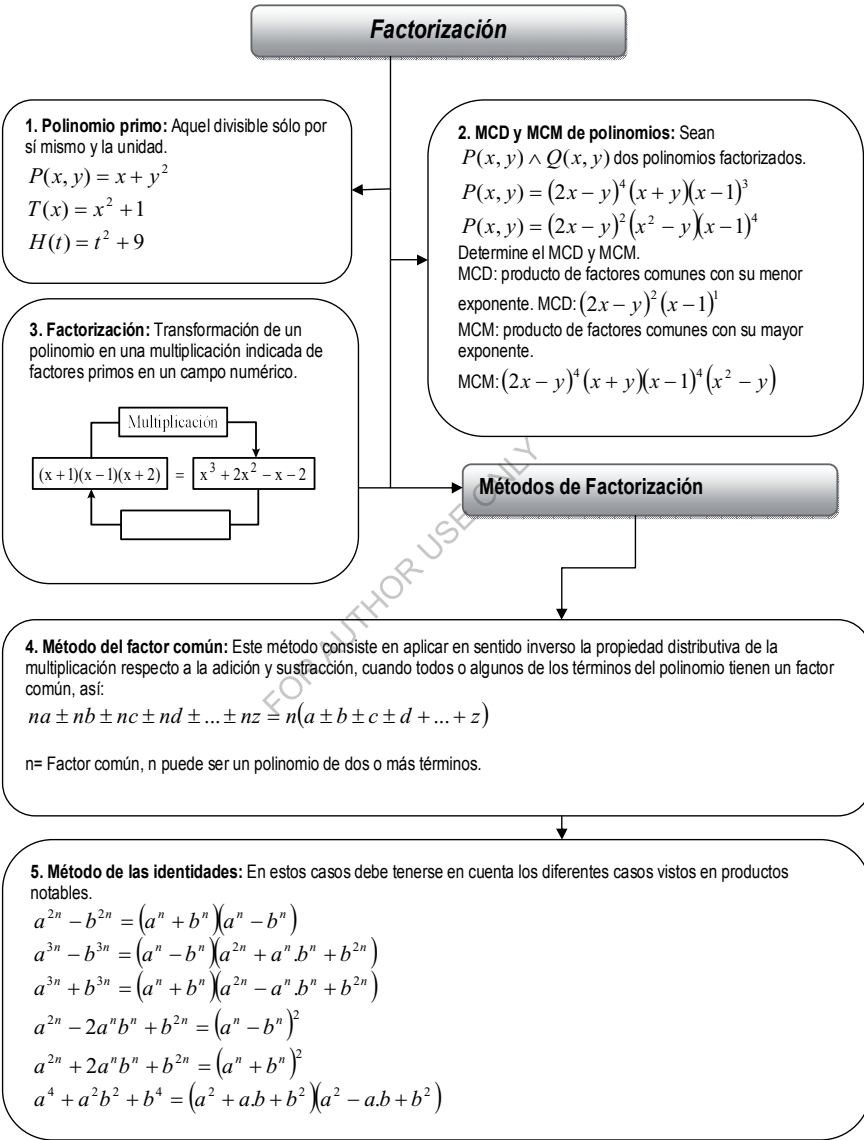
Cociente Notable (CN)	CN expresado con notación sumatoria
$x^{n-1} - x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 - x^{n-4}a^3 + \dots - xa^{n-2} + a^{n-1}$	$\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} x^{n-k} a^{k-1}; \forall n; \text{impar}$

4. Tercer caso: Forma: $\frac{x^n - a^n}{x + a}$

Cociente Notable (CN)	CN expresado con notación sumatoria
$x^{n-1} - x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 - x^{n-4}a^3 + \dots + xa^{n-2} - a^{n-1}$	$\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} x^{n-k} a^{k-1} \forall n; \text{par}$

5. Tercer caso: Forma: $\frac{x^n + a^n}{x - a}$

Cociente Notable (CN)	CN expresado con notación sumatoria
$x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + x^{n-4}a^3 + \dots + xa^{n-2} + a^{n-1} + \frac{2a^n}{x-a}$	$\sum_{k=1}^n x^{n-k} a^{k-1} + \frac{2a^n}{x-a}; \forall n$ No es cociente notable



**Factorización:
Aspa Simple y Aspa Doble**

1. Método del aspa simple: Es empleado cuando la expresión es de la forma.

$$P(x; y) = Ax^{2m} + Bx^m y^n + Cy^{2n}$$



Debe cumplirse:

$$A_1 x^m \cdot A_2 x^m = Ax^{2m}$$

$$\Rightarrow A_1 x^m \cdot C_2 y^n + A_2 x^m \cdot C_1 y^n = Bx^m y^n$$

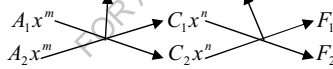
$$C_1 y^n \cdot C_2 y^n = Cy^{2n}$$

Los factores se toman en forma horizontal: $P(x; y) = (A_1 x^m + C_1 y^n)(A_2 x^m + C_2 y^n)$

2. Método del aspa doble: Este método se utiliza en polinomios que tengan la forma:

$$P(x, y) = Ax^{2m} + Bx^m y^n + Cy^{2n} + Dx + Ey + F$$

$$P(x, y) = Ax^{2m} + Bx^m y^n + Cy^{2n} + Dx + Ey + F$$



Debe cumplirse:

$$\text{I. } A_1 x^m \cdot C_2 y^n + A_2 x^m \cdot C_1 y^n = Bx^m y^n$$

$$\text{II. } C_2 y^n \cdot F_2 + C_1 y^n \cdot F_1 = Ey^n$$

$$\text{III. } A_1 x^m \cdot F_2 + A_2 x^m \cdot F_1 = Dx^m$$

Luego los factores se toman en forma horizontal:

$$P(x; y) = (A_1 x^m + C_1 y^n + F_1)(A_2 x^m + C_2 y^n + F_2)$$

Factorización: Aspa Doble Especial

1. Aspa doble especial.

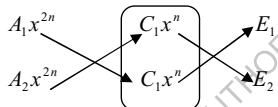
Este criterio se utiliza para factorizar polinomios de 5 términos y generalmente de una variable, que presenta la forma:

$$P(x) = Ax^{4n} + Bx^{3n} + Cx^{2n} + Dx^n + E$$

Procedimiento

- ❖ Adecuamos el polinomio a la forma general; en caso faltase uno o más términos, estos se completan con ceros.
- ❖ Se descomponen convenientemente los extremos, se multiplica en aspa y se suma los productos obtenidos.
- ❖ Se compara el resultado anterior con el término central (Cx^{2n}) del polinomio, y lo que falta para que sea igual a éste, será la expresión a descomponer en partes centrales de los nuevos factores.

$$P(x) = Ax^{4n} + Bx^{3n} + Cx^{2n} + Dx^n + E$$



Se tiene: $A_1x^{2n} \cdot E_2 + A_2x^{2n} \cdot E_1$

Se debe tener: Cx^{2n}

$$\text{Falta: } Cx^{2n} - (A_1E_2 + A_2E_1)x^{2n} = Fx^{2n}$$

- ❖ Deben verificarse las aspas simples (I) y (II) del esquema anterior
- ❖ Los factores se toman en forma horizontal

$$P(x) = (A_1x^{2n} + F_1x^n + E_1)(A_2x^{2n} + F_2x^n + E_2)$$

En caso que estos no sean primos se factorizan por aspa simple.

Factorización

Divisores Binomios

1. Método de los divisores binomios o evaluación binómica.

Dado el polinomio $P(t)$.

$$P(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + a_{n-2} t^{n-2} + \dots + a_0$$

Si: $a \in R; P(t) = 0$; Entonces: $[t - a]$ es un factor de $P(t)$

Luego: $P(t) = (t - a)Q(t)$

$Q(t)$; se obtiene con la regla de RUFFINI, procedimiento para factorizar.

1.1. Determinar las posibles raíces racionales (PRR), están dadas por:

$$P.R.R. = \pm \left\{ \frac{\text{divisores}[a_n]}{\text{divisores}[a_0]} \right\}$$

1.2. Deduces el factor que da lugar al cero del polinomio, mediante el teorema de divisibilidad algebraica.

1.3. El otro factor lo determinas utilizando el método de RUFFINI, el cual emplearas tantas veces como ceros tenga el polinomio, por lo general te recomiendo llevarlo hasta un cociente de cuarto grado para poder aplicar aspa doble especial, o de segundo grado para aplicar el aspa simple.

1.4. Cuando los términos del polinomio son positivos, solamente pruebas los valores negativos.
Ejemplo.

$$B(x) = x^5 + 5x^4 + 7x^3 - x^2 - 8x - 4$$

Posibles Ceros: $\pm 1; \pm 2; \pm 4$

Sin embargo el polinomio se anula para:

$$x = 1; x = 2; x = -1$$

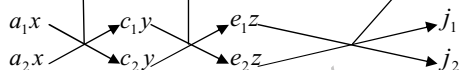
Factorización

Aspa Triple

1. Aspa Triple:

Se emplea para factorizar polinomios que estén en función de 3 variables y que tengan 10 términos, de la forma:

$$P(x, y, z) = \underbrace{ax^2}_1 + \underbrace{bxy}_2 + \underbrace{cy^2}_3 + \underbrace{dyz}_4 + \underbrace{ez^2}_5 + \underbrace{fxz}_6 + \underbrace{gx}_7 + \underbrace{hy}_8 + \underbrace{iz}_9 + \underbrace{j}_{10}$$



Debe cumplirse:

$$a_1x.c_1y + a_2.c_2y = bxy$$

$$c_1y.e_2z + c_2y.e_1z = dyz$$

$$e_1z.j_2 + e_2z.j_1 = iz$$

$$a_1x.e_2z + a_2x.e_1z = fxz$$

$$c_1y.j_2 + c_2y.j_1 = hy$$

$$a_1x.j_2 + a_2x.j_1 = gx$$

Ejemplo:

Factorizar.

$$3x^2 + 2y^2 + 5z^2 + 7xy - 16xz - 7yz - x - 7y + 19z - 4$$

SOLUCIÓN:

Ordenando el polinomio:

$$3x^2 + 7xy + 2y^2 - 7yz - 16xz + 5z^2 - x - 7y + 19z - 4$$

$$3x^2 - x - 7y - 4$$

$$x^2 - 5z + 1$$

Se cumple que:

$$3x.2y + x.y = 7xy; y. - 5z + 2y. - z = -7yz; -z.1 - 5z. - 4 = 19z$$

$$3x. - 5z + x. - z = -16xz; y.1 + 2y. - 4 = -7y; 3x.1 + x. - 4 = -x$$

Finalmente los factores se toman en forma horizontal:

$$(3x + y - z - 4)(x + 2y - 5z + 1)$$

Factorización

Método de los Artificios

1. Cambio de Variables: Consiste En buscar expresiones iguales, directa o indirectamente a través de ciertas transformaciones para luego proceder a un cambio de variable que permitirá transformar una expresión aparentemente compleja en otra más simple.

Ejemplo 1: Factorizar:

$$(x+1)(x-2)(x+2)(x+5) - 13$$

Solución: Asociando adecuadamente:

$$[(x+1)(x+2)][(x-2)(x+5)] - 13 \Rightarrow [x^2 + 3x + 2][x^2 + 3x - 10] - 13; \text{Cambio de variable: } x^2 + 3x = \mu$$

$$(\mu + 2)(\mu - 10) - 13 = \mu^2 - 8\mu - 20 - 13 \Rightarrow \mu^2 - 8\mu - 33 = (\mu - 11)(\mu + 3)$$

$$\text{Reemplazando: } \mu = x^2 + 3x \therefore (x^2 + 3x - 11)(x^2 + 3x + 3)$$

2. Artificio de "QUITA Y PON" o reducción a diferencia de cuadrados: Consiste en sumar y restar una expresión (quitar y poner) de modo tal que haciendo ciertas reducciones logres formar un trinomio cuadrado perfecto y como consecuencia de ésta situación se forma una diferencia de cuadrados.

Ejemplo1: Factorizar:

$$P(x) = x^4 + 2x^2 + 9$$

$$\text{Solución: } P(x) = x^4 + 2x^2 + 9 \Rightarrow P(x) = \frac{x^4}{\sqrt{x^4 - 2(x^2)}} + 2x^2 + \frac{9}{\sqrt{9=3}}$$

Doble producto = $6x^2$

Como se tiene sólo $2x^2$, para conseguir $6x^2$, se suma y se resta $4x^2$; así:

$$P(x) = x^4 + 2x^2 + 9 + 4x^2 - 4x^2 \Rightarrow P(x) = \frac{x^4 + 6x^2 + 9}{(x^2 + 3)^2} - 4x^2$$

$$P(x) = (x^2 + 3)^2 - (2x)^2 \Rightarrow P(x) = (x^2 + 3 + 2x)(x^2 + 3 - 2x) \Rightarrow \star P(x) = (x^2 + 2x + 3)(x^2 - 2x + 3)$$

3. Suma y restas especiales: Consiste en sumar y restar una o varias expresiones en forma conveniente de tal modo que se formen uno de los trinomios: $(x^2 + x + 1)$ ó $(x^2 - x + 1)$, diferencia de cubos: $(x^3 - 1)(x^3 + 1)$.

Algunas veces se forma trinomios de la forma: $(x^2 + x - 1)$ ó $(x^2 - x - 1)$.

Ejemplo1: Factorizar: $F(x) = x^5 + x + 1$

Solución:

Sumar y restar x^2 :

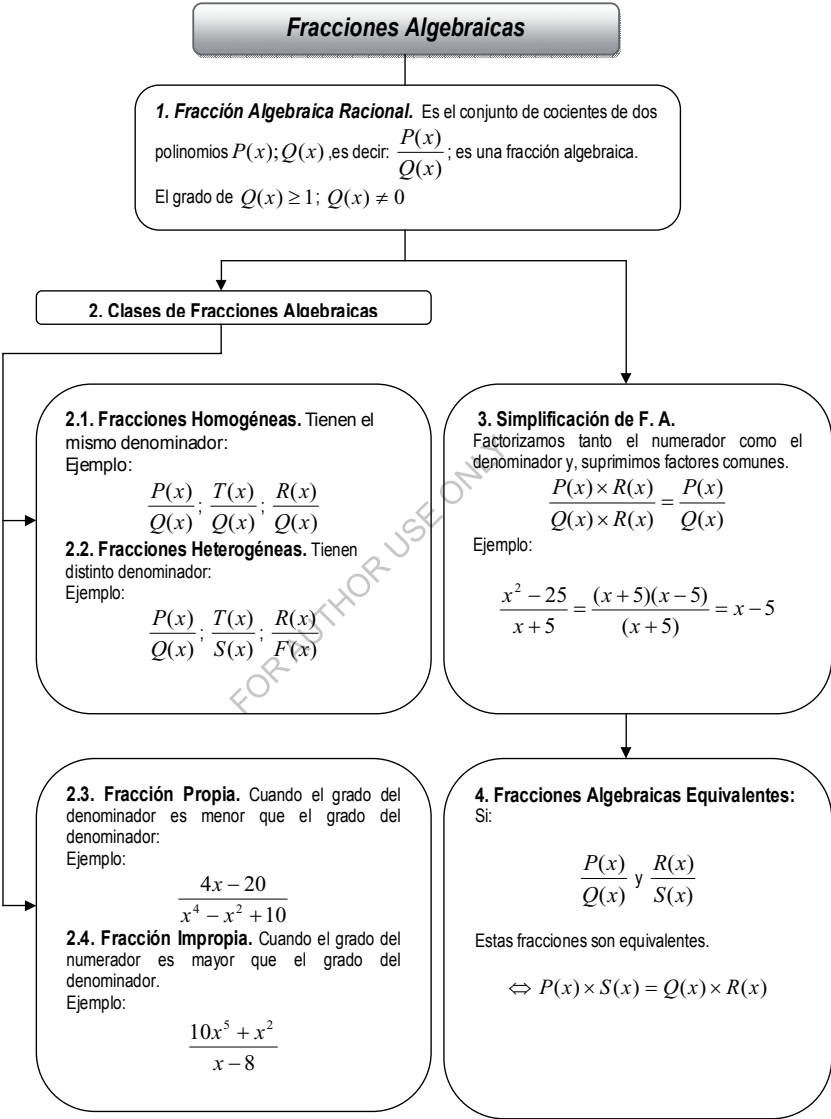
$$F(x) = x^5 + x + 1 + x^2 - x^2 \Rightarrow F(x) = x^5 + x^2 - x^2 + x + 1$$

Agrupando en forma conveniente:

$$F(x) = (x^5 - x^2) + (x^2 + x + 1) \Rightarrow F(x) = x^2(x^3 - 1) + (x^2 + x + 1) \Rightarrow F(x) = x^2(x - 1)(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1)$$

$$F(x) = (x^2 + x + 1)[x^2(x - 1) + 1]$$

$$\star F(x) = (x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 + 1)$$



Operaciones con Fracciones Algebraicas

1. Operaciones con Fracciones

2. Adición y sustracción.

2.1. Fracciones homogéneas.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \pm \frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{P(x) \pm R(x)}{Q(x)}$$

2.2. Fracciones heterogéneas.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \pm \frac{R(x)}{S(x)} = \frac{P(x) \cdot S(x) \pm R(x) \cdot Q(x)}{Q(x) \cdot S(x)}; \text{MCM: } Q(x) \cdot S(x)$$

3. Multiplicación.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \times \frac{R(x)}{S(x)} = \frac{P(x) \times R(x)}{Q(x) \times S(x)}$$

Donde:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \text{ y } \frac{R(x)}{S(x)}; \text{son fracciones simplificadas.}$$

4. División. se transforma la división en multiplicación de fracciones.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \div \frac{R(x)}{S(x)} = \frac{P(x)}{Q(x)} \times \frac{S(x)}{R(x)} = \frac{P(x) \times S(x)}{Q(x) \times R(x)}$$

O también:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \div \frac{R(x)}{S(x)} = \frac{\frac{P(x)}{Q(x)}}{\frac{R(x)}{S(x)}}$$

Fracciones Parciales

1. Primer caso.

$$\frac{P(x)}{(ax+b)(cx+d)(ex+f)} = \frac{A}{ax+b} + \frac{B}{cx+d} + \frac{C}{ex+f}$$

2. Segundo caso.

$$\frac{P(x)}{(ax+b)^2(cx+d)(ex+f)} = \frac{A}{ax+b} + \frac{B}{(ax+b)^2} + \frac{C}{cx+d} + \frac{D}{ex+f}$$

Generalizando:

$$\frac{P(x)}{(x+a)^n} = \frac{a_1}{x+a} + \frac{a_2}{(x+a)^2} + \frac{a_3}{(x+a)^3} + \dots + \frac{a_n}{(x+a)^n}; Gr[P(x)] \leq n-1$$

3. Tercer caso.

$$\frac{P(x)}{(ax^2+bx+c)(dx+e)} = \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} + \frac{C}{dx+e}$$

4. Cuarto caso.

$$\frac{P(x)}{(ax^2+bx+c)^2(dx+e)} = \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} + \frac{Cx+D}{(ax^2+bx+c)^2} + \frac{E}{dx+e}$$

Generalizando:

$$\frac{P(x)}{(ax^2+bx+c)^n} = \frac{Q_1(x)}{ax^2+bx+c} + \frac{Q_2(x)}{(ax^2+bx+c)^2} + \dots + \frac{Q_n(x)}{(ax^2+bx+c)^n}$$

$$Gr[P(x) < 2n]; Gr(Q_1), Q_2(x), \dots, Gr(Q_n) \leq 1$$

Radicación en R

1. Definición: Si : $n \in \mathbb{Z}^+ ; a, b \in \mathbb{R}$

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a \quad \text{Donde:}$$

n = es el índice del radical

a = es el radicando

b = es la raíz n -ésima de a

nota: si n es par entonces $a \geq 0$

2. Definición de exponente fraccionario

$$a^{m/n} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

3. Leyes de signos

3.1.1. $\sqrt[n]{+A} = R^+$

3.1.2. $\sqrt[n]{+A} = R^+$

3.1.3. $\sqrt[n]{-A} = R^-$

3.1.4. $\sqrt[n]{-A} = \# \text{ imaginario}$

4. Radicales equivalentes principio fundamental:

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[mk]{a^{mk}}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[m/k]{a^{m/k}}$$

4.1. Radicales homogéneos: Son de igual índice. Ejm.

$$\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{10}, \sqrt[3]{25}$$

4.2 Radicales semejantes: Son de igual índice e igual cantidad sub radical. Ejm.

$$2^4\sqrt{2}; -10^4\sqrt{2}; 8^4\sqrt{2}$$

4.3. Operaciones con radicales:

4.3.1. Adición y sustracción solo para radicales semejantes

4.3.2. Multiplicación y división solo para radicales homogéneos

Propiedades de la Radicación en R

1. Propiedades: Si : $a, b, m, n \in R; m, n \neq 0$; entonces se cumple que:

$$1.1. \sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

$$1.2. \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, b \neq 0$$

$$1.3. \sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[mnp]{a}$$

$$1.4. \sqrt[m]{a^n} = \sqrt[m/k]{a^{n/k}}$$

$$1.5. \sqrt[p/q]{a^{r/s}} = a^{\frac{q \cdot r}{p \cdot s}}$$

$$1.6. \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a^{-m}}$$

$$1.7. \left[\sqrt[n]{a^m} \right]^p = \sqrt[n]{a^{m \cdot p}}$$

$$1.8. \sqrt[q]{a^q} \sqrt[n]{b^p} \sqrt[s]{c^s} = a^{q/m} \cdot b^{r/m \cdot n} \cdot c^{s/mnp}$$

$$1.9. \sqrt[m]{x^a} \sqrt[n]{x^b} \sqrt[p]{x^c} = \sqrt[mnp]{x^{(an+b)p+c}}$$

$$1.10. \underbrace{\sqrt[n]{a} \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{a} \dots \sqrt[n]{a}}_{m\text{-radicales}} = \sqrt[n^m]{a^{\frac{n^m-1}{n-1}}}$$

$$1.11. \sqrt[m]{a^n} \sqrt[n]{a^n} \sqrt[m]{a^n} \dots \alpha = \sqrt[m-1]{a^n}$$

$$1.12. \sqrt[m]{a^n} \div \sqrt[n]{a^n} \div \sqrt[m]{a^n} \dots \alpha = \sqrt[m+1]{a^n}$$

$$1.13. a^{b^c} = b^{\sqrt[c]{a}}$$

$$1.14. a^{-b^c} = b^{\sqrt[c]{a}}$$

$$1.15. \sqrt[p/q]{a^{r/s}} = a^{\frac{q \cdot r}{p \cdot s}}$$

$$1.16. \left[\sqrt[n]{a^m} \right]^p = \sqrt[n]{a^{m \cdot p}}$$

$$1.17. \left[\sqrt[a]{x^b} \right]^c = \sqrt[a]{x^{b \cdot c}}$$

Propiedades de la Radicación en R

Propiedades Adicionales

1. Propiedades adicionales I.

$$1.1. \underbrace{x^{+x} \dots x}_{\infty} = n \Rightarrow x = \sqrt[n]{n}$$

$$1.2. \underbrace{\sqrt[n]{b} \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} \dots}_{\infty} = b$$

$$1.3. \sqrt{x \sqrt{x \sqrt{x \dots \sqrt{x}}}} = \sqrt[2^n]{x^{2^{n-1}}}$$

$$1.4. \underbrace{\sqrt[n]{x} \sqrt[n]{x} \dots}_{\infty} = x \Leftrightarrow 0 < x < e$$

2. Propiedades adicionales II

$$2.1. \underbrace{\sqrt[n]{x \sqrt[n]{x \sqrt[n]{x \dots \sqrt[n]{x}}}}}_{m\text{-veces}} = \sqrt[n^m]{x^{\frac{n^m-1}{n-1}}}$$

$$2.2. \underbrace{\sqrt[n]{x \div \sqrt[n]{x \div \sqrt[n]{x \div \dots \div \sqrt[n]{x}}}}}_{m\text{-veces}} = \sqrt[n^m]{x^{\frac{n^m-1}{n+1}}}; m = \text{par}$$

$$2.3. \underbrace{\sqrt[n]{x \div \sqrt[n]{x \div \sqrt[n]{x \div \dots \div \sqrt[n]{x}}}}}_{m\text{-veces}} = \sqrt[n^m]{x^{\frac{n^m+1}{n+1}}}; m = \text{impar}$$

$$2.4. \sqrt{a(a+1)} + \sqrt{a(a+1)} + \sqrt{a(a+1)} + \dots = a+1$$

$$1.5. \sqrt{a(a+1)} - \sqrt{a(a+1)} - \sqrt{a(a+1)} - \dots = a$$

$$2.6. \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \dots}}}} = \frac{1 \pm \sqrt{4a+1}}{2}$$

$$2.7. \sqrt{a - \sqrt{a - \sqrt{a - \sqrt{a - \dots}}}} = \frac{-1 \pm \sqrt{4a+1}}{2}$$

Radicales Dobles

1. Radicales Dobles.

1.1. Primer Caso.

Tienen la forma: $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$

Donde: $(A \wedge B \in \mathbb{Z}^+)$

En algunas ocasiones es necesario expresar un radical doble como la suma de dos radicales simples (es decir $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$) el proceso mediante el cual esto es llevado a cabo se llama transformación de radicales dobles a simples.

Nos preguntamos cuando es posible descomponer un radical doble en la suma de dos radicales simples, el siguiente teorema establece para que esto sea posible.

Donde: $C = \sqrt{A^2 - (\sqrt{B})^2}$ ó $\sqrt{A^2 - B}$

Además: $A^2 - B \rightarrow (\text{Cuadrado perfecto})$ Observación: no olvidar que A, B y C son racionales.

2. Método Práctico.

Forma: $\sqrt{P \pm 2\sqrt{Q}}$

$\rightarrow \sqrt{P \pm 2\sqrt{Q}} = \sqrt{a} \pm \sqrt{b}; a > b$ Donde:

$P = a + b$

$Q = a \times b$

Ejemplo:

Transformar el radical doble a radicales simples: $\sqrt{3 + \sqrt{8}}$

Solución:

$$\sqrt{3 + \sqrt{8}} = \sqrt{\frac{3+C}{2}} + \sqrt{\frac{3-C}{2}}; \text{ Luego: } C = \sqrt{3^2 - 8} = \sqrt{1} \therefore C = 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{3 + \sqrt{8}} = \sqrt{\frac{3+1}{2}} + \sqrt{\frac{3-1}{2}} = \sqrt{2} + 1$$

Ejemplo:

Transformar el radical doble a radicales simples.

$$\sqrt{5 - 2\sqrt{6}} \Rightarrow \sqrt{\frac{5}{3+2} - 2\sqrt{\frac{6}{3 \times 2}}} \Rightarrow \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

Casos de Radicales Dobles

1. Segundo Caso.

$$\sqrt{A + \sqrt{B + \sqrt{C + \sqrt{D}}}}$$

Se transforma en:

$$\sqrt{A + \sqrt{B + \sqrt{C + \sqrt{D}}}} = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$$

$$(\sqrt{A + \sqrt{B + \sqrt{C + \sqrt{D}}}})^2 = (\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z})^2$$

$$A + \sqrt{B + \sqrt{C + \sqrt{D}}} = x + y + z + 2\sqrt{x.y} + 2\sqrt{x.z} + 2\sqrt{y.z}$$

Por igualdad de las partes racionales e irracionales.

$$\begin{cases} x + y + z = A \\ 2\sqrt{x.y} = \sqrt{B} \\ 2\sqrt{x.z} = \sqrt{C} \\ 2\sqrt{y.z} = \sqrt{D} \end{cases}$$

Como el sistema tiene 4 ecuaciones y 3 incógnitas se resuelven las 3 últimas ecuaciones y los valores encontrados deben verificar la primera ecuación.

En forma práctica:

$$\sqrt{(x + y + z) + 2(\sqrt{x.y} + \sqrt{x.z} + \sqrt{y.z})} = \sqrt{(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z})^2} = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$$

2. Tercer Caso.

$\sqrt[3]{A \pm \sqrt{B}}$; Se transforma en:

$$\sqrt[3]{A \pm \sqrt{B}} = x \pm \sqrt{y}$$

Uno de ellos ($x \vee \sqrt{y}$), es necesariamente racional.

Para calcular "x" ^ "y" se resuelve el siguiente sistema.

$$\begin{cases} 4x^3 - 3Cx = A \\ y = x^2 - C \end{cases}$$

Donde: $C = \sqrt[3]{A^2 - B}$;

C= raíz exacta

X, se calcula por tanteo.

Racionalización

1.Racionalización: Racionalizar una fracción es transformarla en otra equivalente cuyo denominador no tenga cantidades afectadas por radicales.
Generalmente se realiza la racionalización del denominador de una fracción: pero en algunos casos es necesario racionalizar también su numerador.
Al factor que convierte al denominador de la fracción de irracional en racional se le llama FACTOR RACIONALIZANTE.

Casos

Casos	Expresión a Racionalizar	Factor Racionalizante (F.R.)	Resultado
$f = \frac{N}{\sqrt{a}}$	$\sqrt{a}$	$\sqrt{a}$	$f = \frac{NFR}{a}$
$f = \frac{N}{\sqrt[n]{a}}$	$\sqrt[n]{a}$	$\sqrt[n]{a^{n-1}}$	$f = \frac{NFR}{a}$
$f = \frac{N}{\sqrt[n]{a^r}}$	$\sqrt[n]{a^r}$	$\sqrt[n]{a^{n-r}}$	$f = \frac{NFR}{a}$
$f = \frac{N}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$	$\sqrt{a} + \sqrt{b}$	$\sqrt{a} - \sqrt{b}$	$f = \frac{NFR}{a - b}$
$f = \frac{N}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$	$\sqrt{a} - \sqrt{b}$	$\sqrt{a} + \sqrt{b}$	$f = \frac{NFR}{a - b}$
$f = \frac{N}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}}$	$(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})$	$\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}$	$f = \frac{NFR}{a + b}$
$f = \frac{N}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}}$	$(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})$	$\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}$	$f = \frac{NFR}{a - b}$

Caso	Factor Racionalizante	Resultado
$f = \frac{N}{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}$	$\sqrt[n]{a^{n-1}} - \sqrt[n]{a^{n-2}} \cdot b + \dots + \sqrt[n]{b^{n-1}}$	$f = \frac{NFR}{a + b}; \forall n \text{ impar}$
$f = \frac{N}{\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}}$	$\sqrt[n]{a^{n-1}} - \sqrt[n]{a^{n-2}} \cdot b + \dots + \sqrt[n]{b^{n-1}}$	$f = \frac{NFR}{a - b}; \forall n \text{ par}$
$f = \frac{N}{\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}}$	$\sqrt[n]{a^{n-1}} + \sqrt[n]{a^{n-2}} \cdot b + \dots + \sqrt[n]{b^{n-1}}$	$f = \frac{NFR}{a - b}; \forall n \text{ par o impar}$

Factoriales

1. Factoriales:

El factorial de "n" se define como el producto desde la unidad en forma consecutiva, hasta el número dado.

2. Notación.

Símbolos que se utilizan:

$n! \vee \lfloor n$; Se lee: "Factorial de n"

$n! = n(n-1)(n-2)(n-3)\dots 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Ejemplo:

$0! = 1$ (convención)

$1! = 1$

$2! = 2 \cdot 1 = 2$

$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$

$7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$

$8! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40320$

3. Observación:

El factorial de un número negativo no existe.

$(-3)! =$ No existe

$(-5)! =$ No existe

$(-\frac{1}{4})! =$ No existe

$(\sqrt{3})! =$ No existe

$(1 + \sqrt{2})! =$ No existe

4. Importante:

Por convención: $0! = 1$; por definición: $1! = 1$.

Sabemos: $n!(n+1) = (n+1)! \Rightarrow n! = \frac{(n+1)!}{n+1}$

Si: $n = 1 \Rightarrow 1! = \frac{(1+1)!}{1+1} = \frac{2!}{2} = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1$

Si: $n = 0 \Rightarrow 0! = \frac{(0+1)!}{0+1} = \frac{1!}{1} = \frac{1}{1} = 1$

Ojo: $0! = 1! \Rightarrow 0 = 1$; ¡...Absurdo...!

Propiedades de los Factoriales

1. Propiedades:

$$1.1. n! = n(n-1)!$$

$$1.2. Si : x! = n! \Rightarrow x = n$$

$$1.3. Si : x! = 1 \Rightarrow x = 0 \vee x = 1$$

$$1.4. \frac{a!}{a} = (a-1)!$$

$$1.5. \frac{a}{(a+1)!} = \frac{1}{a!} - \frac{1}{(a+1)!} \quad 1.6. \exists n! \Leftrightarrow n \in \mathbb{Z}^+ \vee x = 1$$

$$1.7. (x+y)! \neq (x)! + (y)!$$

$$1.8. (x,y)! \neq (x)! \cdot (y)!$$

$$1.9. Si : a! = b! \Rightarrow a = b \forall a \in \mathbb{N}$$

$$1.10. Si : n! = n(n-1)! = n(n-1)(n-2)! = \dots$$

$$\forall n \geq 1; n \in \mathbb{N}$$

$$1.11. n! = n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1)(n-k)!$$

$$1.12. Si : n!(n+1) = (n+1)!$$

$$1.13. r!(r+1)(r+2)(r+3) \dots n = n!$$

2. Cofactorial o Semifactorial:

Se define:

$$a!! = \begin{cases} 1.3.5 \dots a; & si : a = \text{impar} \\ 2.4.6 \dots a; & si : a = \text{par} \end{cases}$$

Ejemplos:

$$7!! = 1.3.5.7$$

$$8!! = 2.4.6.8$$

3. Relación entre un cofactorial y el factorial:

Si: a es impar se tiene:

$$a!! = \frac{a!}{2^{\frac{a-1}{2}} \left(\frac{a-1}{2} \right)!}, \quad a \in \mathbb{N}$$

Si: a es par se tiene:

$$a!! = 2^{\frac{a}{2}} \left(\frac{a}{2} \right)! \quad a \in \mathbb{N}$$

Número Combinatorio

1. Número Combinatorio:

Se define como el número total de grupos que se pueden formar con "n" elementos tomados de "k" en "k", de modo que los grupos se diferencian por lo menos en un elemento.

2. Notación:

$$C_k^n \vee \binom{n}{k}; n, k \in N / 0 \leq k \leq n$$

Se lee: combinaciones de n elementos tomados de k en k, o simplemente combinaciones de n en k.

Definición:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! k!}$$

Donde:

$$n, k \in N; n \geq k \geq 0$$

Además:

n = Es el índice superior

k = Es el índice inferior

Ejemplo:

$$C_6^9 = \frac{9!}{(9-6)! 6!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6!}{3! \times 6!} = 84$$

3. Propiedades Básicas:

$$3.1. C_0^n = 1; C_1^n = n; C_n^n = 1$$

3.2. Complemento

$$C_k^n = C_{n-k}^n$$

3.3. Degradación:

$$C_k^n = \frac{n}{k} \cdot C_{k-1}^{n-1}$$

3.4. Reducción:

$$C_k^n + C_{k+1}^n = C_{k+1}^{n+1}$$

$$C_k^n = \frac{n}{k} \cdot C_{k-1}^{n-1}$$

$$C_k^n = \frac{n}{n-k} \cdot C_k^{n-1}$$

$$C_k^n = \frac{n-k+1}{k} \cdot C_{k-1}^n$$

Propiedades de Número Combinatorio

1. Propiedades Adicionales.

$$1.1. \binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}$$

$$1.2. \binom{n}{k} = \frac{n-k+1}{k} \binom{n}{k-1}$$

$$1.3. \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$1.4. \binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

$$1.5. \binom{n}{k+1} = \frac{n-k}{k+1} \binom{n}{k}$$

$$1.6. \binom{n}{k} = \binom{n}{p} \Rightarrow \begin{cases} k = p \\ \vee \\ k + p = n \end{cases}$$

2. Número Combinatorio de Índice Superior Negativo o Fraccionario.

$$\binom{n}{k} = \frac{n \overbrace{(n-1)(n-2)(n-3) \dots (n-k+1)}^{k-\text{Factores}}}{k!}$$

Con: $n \in \mathbb{R} \wedge k \in \mathbb{N}$

3. Series Notables.

$$C_0^n + C_1^n + C_2^n + \dots + C_n^n = 2^n; \forall n \in \mathbb{N}$$

$$C_0^n + C_2^n + C_4^n + \dots + C_{n-1}^n = 2^{n-1}; n : \text{impar}$$

$$C_0^n + C_3^n + C_5^n + \dots + C_{n-1}^n = 2^{n-1}; n : \text{par}$$

4. Igualdad de Números Combinatorios.

Si:

$$C_k^n = C_r^m \Rightarrow \begin{cases} n = m \wedge k = r \\ n = m \wedge k + r = n \end{cases}$$

Binomio de Newton

1. Definición.

La potencia de un binomio es un polinomio que se denomina desarrollo binomial o de Newton. Así tenemos:

$$(x + a)^1 = x + a$$

$$(x + a)^2 = x^2 + 2xa + a^2$$

$$(x + a)^3 = x^3 + 3x^2a + 3xa^2 + a^3$$

$$(x + a)^4 = x^4 + 4x^3a + 6x^2a^2 + 4xa^3 + a^4$$

$$(x + a)^5 = x^5 + 5x^4a + 10x^3a^2 + 10x^2a^3 + 5xa^4 + a^5$$

En forma general:

$$(x + a)^n = C_0^n x^n + C_1^n x^{n-1}a + C_2^n x^{n-2}a^2 + \dots + C_n^n a^n$$

Donde: x: primer término; a: segundo término; además $x; a \neq 0$ y $n \in \mathbb{Z}^+$

2. Cálculo del término general (t_{k+1})

Sea: $P(x;a) = (x + a)^n$

2.1. Contado de izquierda a derecha:

$$t_{k+1} = C_k^n x^{n-k} \cdot a^k$$

Donde: " t_{k+1} " es el término de lugar $(k + 1)$

2.2. Contado de derecha a izquierda:

$$t_{k+1} = C_k^n x^k \cdot a^{n-k}$$

3. Término central

3.1. El desarrollo del binomio tendrá un único término central si " n " es par, luego la posición

que ocupa este término es: $\frac{n}{2} + 1$

$$t_c = t_{\frac{n}{2}+1} = C_{\frac{n}{2}}^n x^{\frac{n}{2}} \cdot a^{\frac{n}{2}}$$

3.2. Si " n " es impar existen dos términos centrales.

$$t_{\frac{n+1}{2}} \wedge t_{\frac{n+1}{2}+1}$$

4. **Fórmula de Leibnitz:** Para obtener el desarrollo de un trinomio con exponente natural usaremos la fórmula de Leibnitz:

$$(x + y + z)^n = \sum_{\alpha+\beta+\gamma=n} \frac{n!}{\alpha! \cdot \beta! \cdot \gamma!} x^\alpha y^\beta z^\gamma$$

Donde: " α ", " β ", " γ " y " n " $\in \mathbb{Z}^+$

Además: $\alpha + \beta + \gamma = n$, donde la suma se realiza para todos los valores que pueda tomar " α ", " β ", " γ ".

5. Propiedades adicionales

5.1. La suma de coeficientes en el desarrollo del binomio $(ax + by)^n$ es:

$$x = y = 1(a + b)^n$$

Donde " x " e " y " son las variables.

5.2. La suma de exponentes en el desarrollo del binomio $(x^\alpha + y^\beta)^n$ es:

$$\frac{(\alpha + \beta)(n+1)}{2}$$

5.3. El coeficiente del **valor máximo** en el desarrollo de $(x + a)^n$ es el término central si " n " es par y los dos términos centrales si " n " es impar

Si: $(x + y)^{2n} \rightarrow \text{coef. máx.} : C_n^{2n}$

Si: $(x + y)^{2n+1} \rightarrow \text{coef. máx.} : C_n^{2n+1} \text{ y } C_{n+1}^{2n+1}$

5.4. El número de términos del desarrollo del trinomio $(x + y + z)^n$ es:

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2}; n \in \mathbb{Z}^+$$

5.5. En general, el número de términos del desarrollo de:

$$(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_r)^n \quad \text{Es:}$$

$$\frac{(n+r-1)!}{n!(r-1)!}; n \in \mathbb{Z}^+$$

Binomio de Newton: Triángulo de Pascal

1. triángulo de Pascal o Tartaglia:

Al considerar sólo los coeficientes de las sucesivas potencias de $(a + b)$, obtenemos un arreglo de números en forma de triángulo:

$$\begin{array}{rcl}
 (a+b)^0 & & 1 \\
 (a+b)^1 & & 1 \quad 1 \\
 (a+b)^2 & & 1 \quad 2 \quad 1 \\
 (a+b)^3 & & 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
 (a+b)^4 & & 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
 (a+b)^5 & & 1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
 (a+b)^6 & & 1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1
 \end{array}$$

...

Este arreglo se llama Triángulo de Pascal en memoria del matemático francés Blaise Pascal, que tiene propiedades interesantes con relación a la fórmula del Binomio de Newton y al Cálculo de Probabilidades.

2. Observaciones:

Término general contado de izquierda a derecha:

$$2.1. T_{k+1} = C_k^n \cdot x^{n-k} \cdot y^k$$

Término general contado de derecha a izquierda:

$$2.2. T_{k+1} = C_k^n \cdot y^{n-k} \cdot x^k$$

$$2.3. Si: C_k^n = C_p^n \Rightarrow k = p \text{ ó } k + p = n$$

$$2.4. C_0^n + C_1^n + C_2^n + \dots + C_n^n = 2^n; \forall n \in N$$

$$2.5. \sum Exp = (\alpha + \theta) \cdot \frac{n(n+1)}{2}; en: (x^\alpha + y^\theta)^n$$

$$2.6. \binom{n}{0} = 1 = C_0^n; 2.7. \binom{n}{n} = C_n^n = 1; 2.8. C_k^n = \frac{n}{k} C_{k-1}^{n-1}$$

$$2.9. C_k^n = \frac{n}{n-k} C_k^{n-1}$$

$$2.10. C_k^n = \frac{n-k+1}{k} C_{k-1}^n; 2.11. C_k^n = C_{n-k}^n$$

$$2.12. C_k^n + C_{k+1}^n = C_{k+1}^{n+1}$$

Números Imaginarios

1. Cantidades Imaginarias: Son aquellas que resultan de extraer una raíz de índice par a un número negativo.

$$\sqrt[n]{-A} = \# \text{ imaginario}$$

1.1. Unidad Imaginaria: (Notación de Gauss) $\sqrt{-1} = i$

Ej. $\sqrt{-9} = \sqrt{(9)(-1)} = \sqrt{9}\sqrt{-1} = 3i$; en general.

$$\sqrt{-a} = \sqrt{(a)(-1)} = \sqrt{a}\sqrt{-1} = \sqrt{a}i$$

Observación: $\sqrt{-a}\sqrt{-b} \neq \sqrt{a \times b}$

2. Potencias de la unidad imaginaria:

$$i^1 = i$$

$$i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$$

$$i^3 = i^2 \cdot i = -i$$

$$i^4 = i^3 \cdot i = -i \cdot i = -i^2 = 1$$

$$i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i$$

$$i^6 = i^5 \cdot i = i \cdot i = i^2 = -1$$

$$i^7 = i^6 \cdot i = -1 \cdot i = -i$$

$$i^8 = i^7 \cdot i = -i \cdot i = -i^2 = 1$$

Generalizando:

$$i^{4k} = 1$$

$$i^{4k+1} = i$$

$$i^{4k+2} = -1$$

$$i^{4k+3} = -i$$

$$i^0 = 1; i^1 = i; i^2 = -1; i^3 = -i$$

Generalizando:

$$i^{\pm 4+k} = i^k; \forall k \in \mathbb{Z}$$

Donde: 4 : múltiplo de 4
i...Importante...!

$$i^{2^{2^2}} = i^4 = 1$$

Nota:

$$2^n = 4, n \geq 2$$

Propiedades de Números Imaginarios

1. Observación:

$$i^4 = i^8 = i^{12} = i^{16} = i^{20} = \dots = i^{4k} = 1$$

$$\frac{1}{i^4} = \frac{1}{i^8} = \frac{1}{i^{12}} = \frac{1}{i^{16}} = \frac{1}{i^{20}} = \dots = \frac{1}{i^{4k}} = 1$$

$$i^{-1} = \frac{1}{i} \times \frac{i^3}{i^3} = -i \quad i^{-3} = \frac{1}{i^3} \times \frac{i}{i} = i$$

$$i^{-2} = \frac{1}{i^2} \times \frac{i^2}{i^2} = -1 \quad i^{-4} = \frac{1}{i^4} = 1$$

$$i^{-224} = 1; i^{-77591} = i^3 = -i; i^{-1111} = i$$

Por tanto deducimos que:

$$i^{-n} = (-1)^n (i^n); n \in \mathbb{N}$$

2. Propiedades:

$$i + i^2 + i^3 + i^4 = 0$$

$$i + i^2 + i^3 + i^4 + i^5 + \dots + i^{4k} = 0$$

$$1 + i + i^2 + i^3 = 0$$

$$i^n + i^{n+1} + i^{n+2} + i^{n+3} = 0; \forall n \in \mathbb{Z}$$

3. Equivalencias Importantes:

$$\frac{1+i}{1-i} = i; \frac{1-i}{1+i} = -i$$

$$\frac{1}{i} = -i$$

$$(1+i)^2 = 2i$$

$$(1-i)^2 = -2i$$

$$(1+i)^4 = (1-i)^4 = -4$$

$$(1+i)^8 = (1-i)^8 = 16$$

$$(1+i)^3 = 1 + 3i + 3i^2 + i^3 = -2(1-i)$$

$$(1-i)^3 = 1 - 3i + 3i^2 - i^3 = -2(1+i)$$

Números Complejos

1. Números Complejos: Número complejo es aquel que resulta de la unión de un número real con un número imaginario.

$$Z = \alpha \pm \beta i \Leftrightarrow \alpha \wedge \beta \in \mathfrak{R}$$

$$\text{Además : } i = \sqrt{-1}$$

2. Operaciones con complejos:

2.1. Complejos conjugados: Si: $Z = \alpha + \beta i$

$$\text{Su conjugado: } \bar{Z} = \alpha - \beta i$$

2.2. Complejos opuestos: Si: $Z = \alpha + \beta i$

$$\text{Su opuesto: } Z_0 = -\alpha - \beta i$$

Dado: $Z = \alpha + \beta i$; entonces su módulo está dado por: $Z = \alpha + \beta i \wedge \Psi = \theta + \lambda i$

$$|Z|^2 = \alpha^2 + \beta^2 \vee |Z| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

2.3. Adición: Si:

$$\Rightarrow Z + \Psi = \alpha + \theta + (\beta + \lambda) \cdot i$$

2.4. Sustracción:

$$\text{Si: } Z = \alpha + \beta i \wedge \Psi = \theta + \lambda i$$

$$Z - \Psi = \alpha - \theta + (\beta - \lambda) \cdot i$$

2.5. Producto:

$$\text{Si: } Z = \alpha + \beta i \wedge \Psi = \theta + \lambda i$$

$$Z \cdot \Psi = (\alpha \cdot \theta - \beta \cdot \lambda) + (\alpha \cdot \lambda + \beta \cdot \theta) \cdot i$$

2.6. División:

$$\text{Si: } Z = \alpha + \beta i \wedge \Psi = \theta + \lambda i$$

$$\frac{Z}{\Psi} = \frac{\alpha \cdot \theta + \beta \cdot \lambda}{\theta^2 + \lambda^2} + \frac{(\beta \cdot \theta - \alpha \cdot \lambda) \cdot i}{\theta^2 + \lambda^2}$$

2.7. Radicación:

$$\text{Si: } Z = \alpha + \beta i$$

$$\sqrt{\alpha + \beta i} = \sqrt{\frac{\rho + \alpha}{2}} + \sqrt{\frac{-\rho + \alpha}{2}}; \text{Donde: } \rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

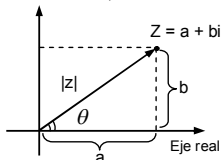
También:

$$\sqrt{a + ib} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \pm i \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}; a^2 + b^2 = (a + ib)(a - ib)$$

Representación de Números Complejos

1. Representación polar o trigonométrica de los números complejos.

Sea: $Z = a + bi$, un número complejo diferente del nulo. Es decir: $|z| \neq 0$.



De la figura: Norma: $\rho^2 = |Z|^2 = a^2 + b^2$; donde: $\tan \theta = \frac{b}{a}$; entonces:

$$Z = a + bi \rightarrow Z = |Z| \cos \theta + |Z| i \sin \theta$$

$$\therefore Z = |Z| (\cos \theta + i \sin \theta) = \rho [\cos \theta + i \sin \theta]; \text{ Pues: } a = \rho \cos \theta \wedge b = \rho \sin \theta$$

2. Teorema de MOIVRE.

Si:

$$Z = a + bi = \rho [\cos \theta + i \sin \theta] = Z^n = [\rho (\cos \theta + i \sin \theta)]^n$$

$$Z^n = \rho^n [\cos n\theta + i \sin n\theta]; \text{ Donde: } n \in \mathbb{Z}^+$$

Una consecuencia es para potenciar fracciones.

$$Z^{\frac{1}{n}} = [a + bi]^{\frac{1}{n}} = [\rho (\cos \theta + i \sin \theta)]^{\frac{1}{n}} \Rightarrow Z^{\frac{1}{n}} = \rho^{\frac{1}{n}} \left[\cos \frac{\theta}{n} + i \sin \frac{\theta}{n} \right]$$

Raíces de números complejos en su forma polar.

$$[a + bi]^{\frac{1}{n}} = [\rho (\cos \theta + i \sin \theta)]^{\frac{1}{n}} = \rho^{\frac{1}{n}} \left[\cos \left(\frac{\theta + 360^\circ k}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\theta + 360^\circ k}{n} \right) \right]$$

3. Multiplicación de números complejos, en su forma polar.

$$Z_1 = \rho_1 [\cos \theta_1 + i \sin \theta_1] \quad y \quad Z_2 = \rho_2 [\cos \theta_2 + i \sin \theta_2]$$

$$\Rightarrow Z_1 \cdot Z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

Observación:

Notación de Euler:

$$Z = \rho e^{i\theta}$$

$$Z = e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \wedge Z = e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta = \frac{1}{\cos \theta + i \sin \theta}$$

Representación CIS.

$$Z = \rho [\cos \theta + i \sin \theta] = \rho \text{Cis } \theta$$

Representación Factorial.

$$Z = \rho [\cos \theta + i \sin \theta] = \rho \angle \theta$$

Ecuaciones

1. Ecuación. Es una relación de igualdad que se establece entre dos expresiones matemáticas donde por lo menos existe una variable, qué de aquí en adelante lo denominaremos incógnita.

$$\underbrace{A(x; y; z; \dots)}_{I-\text{miembro}} = \underbrace{B(x; y; z; \dots)}_{II-\text{miembro}}; \quad A \wedge B : \text{Son expresiones matemáticas.}$$

Transponiendo términos llegamos a lo siguiente: $\underbrace{A(x; y; z; \dots) - B(x; y; z; \dots)}_{F(x; y; z; \dots)=0} = 0$; forma general.

Clasificación de las Ecuaciones

2. Ecuaciones compatibles. Tienen solución y pueden ser:

2.1. Determinado. El número de soluciones es finito: Ejemplo: $5x + 8 = 10$

2.2. Indeterminado. Tienen infinitas soluciones: Ejemplo:

3. Ecuaciones incompatibles. Son aquellas que no tienen solución.

Ejm: $9(x + 1) + 5 = 9x + 11 \Rightarrow 14 = 11$; ¡...Absurdo...!

4. Ecuaciones irracionales. Los exponentes de sus incógnitas son fracciones.

$$\sqrt{x} + x = 9; x^{\frac{2}{3}} + x = 7; \sqrt{x+8} = \sqrt{3x+15}$$

5. Ecuaciones numéricas. Son aquellas cuyos coeficientes son numéricos.

$$7x + 9 = 23; \sqrt{2}x^2 + 1 = 9$$

6. Ecuaciones literales. Son aquellas cuyos coeficientes son letras.

$$Ax + Bx^2 + C = 0; Mz^3 + 1 = D$$

7. Ecuaciones racionales. Los exponentes de sus incógnitas $\in \mathbb{Z}$ y pueden ser:

7.1. Enteras: $x + 2 = \frac{3}{4}x - 1 + 0,5x^2$

7.2. Fraccionarias: $\frac{\sqrt{3}}{4}x + \frac{1}{x} = 8$

a). Ecuaciones de primer grado.

$$ax + b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}; a \neq 0$$

b). Ecuación de segundo grado.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$a, b, c \in \mathbb{R}; a \neq 0$$

9. Sistemas de ecuaciones.

Es aquel conjunto de ecuaciones que se verifican para los mismos valores de sus incógnitas.

8. Ecuaciones equivalentes.

Son aquellas que tienen las mismas soluciones. Ejm.

$$3x - 2 = 7 \wedge 5x + 4 = 19$$

Ecuaciones Irracionales

1. Ecuaciones irracionales: Una ecuación con una variable en un radicando es una ecuación irracional. Su forma general es:

$$ax + n\sqrt{bx + c} = d$$

2. Resolución:

Para resolver estas ecuaciones, se elevan los 2 miembros de la ecuación a la potencia que resulte conveniente según el índice del radical.

El procedimiento general de resolución de las mismas consiste en:

- 2.1. Aislar en uno de los miembros el término que tiene la raíz cuadrada.
- 2.2. Elevar al cuadrado ambos miembros para eliminar la raíz. Después de simplificar la ecuación resultante, se obtiene una ecuación de 2º. grado con una con una incógnita.
- 2.3. Se procede a resolver ésta la ecuación de segundo grado, con arreglo a los métodos habituales.
- 2.4. Al haberse elevado la ecuación al cuadrado. Se ha introducido una solución "FALSA". Las dos raíces obtenidas de la ecuación de segundo grado se han de comprobar en la ecuación irracional original. Se descubrirá entonces que solo una de ellas cumple la igualdad de la ecuación. Esta será su única solución.

3. Caso particular:

Ecuación de la forma:

$$\frac{\sqrt{x}}{a} + \frac{a}{\sqrt{x}} = c$$

Con a y c constantes

Se hace que: $y = \frac{\sqrt{x}}{a}$

Entonces la ecuación queda reducida a:

$$y + \frac{1}{y} = c, \text{ lo que nos lleva a una ecuación cuadrática: } y^2 - cy + 1 = 0$$

De donde se obtendrá las soluciones y_1 e y_2

Luego: $y_1 = \frac{\sqrt{x}}{a}$; $y_2 = \frac{\sqrt{x}}{a}$

Las resolvemos elevando al cuadrado cada término.

Ecuaciones Fraccionarias

1. Definición: Definimos como ecuaciones fraccionarias a toda ecuación que posee variables o incógnita en el denominador.

Ejemplos:

$$\frac{5}{x+2} - \frac{2}{x-2} = \frac{6}{x^2-4}$$

$$\frac{2x-8}{x^2-25} = \frac{1}{x-5}$$

$$\frac{7}{x} - \frac{8}{x+2} = \frac{4}{x+2}$$

2. Resolviendo Ecuaciones Fraccionarias.

Antes de comenzar a resolver la ecuación fraccionaria debemos observar.

Primero: determinar el conjunto universo o campo de existencia.

Segundo: resolver la ecuación usando los conocimientos básicos aprendidos anteriormente

3. Ejemplo: resolver la ecuación.

$$\frac{12}{x} = \frac{4}{x-2}$$

Primero vamos a determinar el conjunto universo.

$$x \neq 0$$

$$x-2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$$

Luego el conjunto universo es: $U = R - \{0; 2\}$

Segundo vamos a resolver la ecuación: $\frac{12}{x} = \frac{4}{x-2}$

$$\text{MCM de: } (x; x-2) = x(x-2) \Rightarrow \frac{12(x-2)}{x(x-2)} = \frac{4x}{x(x-2)}$$

$$\Rightarrow 12x - 24 = 4x \Rightarrow 12x - 4x = 24 \Rightarrow 8x = 24 \Rightarrow x = 3$$

$$C.S = \{3\}$$

4. ¡...Recuerde...!

4.1. Siempre que vamos a resolver una ecuación fraccionaria, primero debemos determinar el conjunto universo o campo de existencia.

4.2. Calculamos el MCM entre los denominadores.

4.3. Acuerdece, que durante la resolución sustituimos los antiguos denominadores por el MCM, después dividimos el MCM por los antiguos denominadores, tomamos el resultado y multiplicamos por el denominador.

Ecuaciones Cuadráticas

1. Ecuación de Segundo Grado:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Donde: $a, b, c \in \mathbb{R} \wedge a \neq 0$

2. Formas de Resolución:

2.1. Por Factorización:

Si: $ax^2 + bx + c = 0$

Factorizamos por el método del aspa simple.

a). Descomponer los extremos.

b). Verificar que la suma de productos en aspa sea igual al término central.
Los factores obtenidos los igualamos a cero.

$$m.n = 0 \Leftrightarrow \underbrace{m}_{x_1} = 0 \wedge \underbrace{n}_{x_2} = 0$$

$$C.S = \{x_1; x_2\}$$

3. Fórmula General:

Si: $ax^2 + bx + c = 0$

Completando cuadrados.

$$a \left[x^2 + \frac{b}{a}x \right] = -c$$

$$a \left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} \right] = \frac{ab^2}{4a^2} - c$$

$$a \left[x + \frac{b}{2a} \right]^2 = \frac{ab^2 - 4a^2c}{4a^2}$$

$$\left[x + \frac{b}{2a} \right]^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Finalmente:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Donde:

$$\Delta = b^2 - 4ac = \text{Discriminante}$$

$$C.S = \{x_1; x_2\}$$

Ecuaciones Cuadráticas: Propiedades de las Raíces

1. Propiedades de las Raíces:

$$\text{Sea : } ax^2 + bx + c = 0$$

Si : $x_1 \wedge x_2$; son raíces $\Rightarrow$ se cumple:

$$1.1. x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$1.2. x_1 - x_2 = \frac{\sqrt{\Delta}}{a} = \sqrt{S^2 - 4P}$$

Donde : $S = \text{suma}$; $P = \text{producto}$

$$1.3. x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

$$1.4. \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -\frac{b}{c}$$

2. Formación de una Ecuación Cuadrática:

Sea : $ax^2 + bx + c = 0$, dividimos todo entre: a

$$\frac{ax^2}{a} + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$\text{Como: } x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}; x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \Rightarrow$$

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2 = 0$$

3. Naturaleza de las Raíces:

$$\text{Sea : } ax^2 + bx + c = 0 \wedge \Delta = b^2 - 4ac$$

Si : $\Delta > 0 \Rightarrow \exists$ Dos raíces reales y diferentes.

La parábola corta al eje x en dos puntos.

Si : $\Delta = 0 \Rightarrow \exists$ Dos raíces reales e iguales.

La parábola corta al eje x en un solo punto.

Si : $\Delta < 0 \Rightarrow \exists$ Dos raíces complejas y conjugadas.

La parábola no corta al eje x .

Ecuaciones Cuadráticas: Propiedades Adicionales

1. Propiedades Adicionales.

Sean: $S = x_1 + x_2 \wedge P = x_1 \cdot x_2 \wedge D = x_1 - x_2$

$$1.1. (x_1 + x_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 = 4x_1 \cdot x_2 \Rightarrow \text{Luego: } D^2 = S^2 - 4P$$

$$1.2. x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2P; \quad 1.3. x_1^3 + x_2^3 = S^3 - 3SP$$

$$1.4. x_1^2 + x_2^2 = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}; \quad 1.5. x_1^3 + x_2^3 = \frac{b(3ac - b^2)}{a^3}$$

$$1.6. (x_1 + x_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 = \frac{4c}{a}; \quad 1.7. \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -\frac{b}{c}$$

2. Propiedades Particulares.

En: $ax^2 + bx + c = 0$

La condición que se debe cumplir para que:

2.1. Sus raíces sean simétricas u opuestas: $x_1 + x_2 = 0$

Es decir las raíces sean iguales en valor absoluto, pero de signos contrarios.

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \Rightarrow x_1 = -x_2; \text{ Luego la condición necesaria y suficiente es: } b = 0$$

La ecuación cuadrática que admite raíces recíprocas tiene la forma genérica.

$$ax^2 + c = 0; a, b \neq 0$$

2.2. Sus raíces sean recíprocas o inversas: $x_1 \cdot x_2 = 1$

$$\text{Por propiedad: } x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = 1 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{x_2}$$

Entonces la condición necesaria y suficiente es: $c = a$

La ecuación cuadrática que admite raíces recíprocas tiene la forma genérica.

$$ax^2 + bx + a = 0; a, \neq 0$$

2.3. Una de sus raíces es igual a la unidad: es decir $x = 1$; verifica la ecuación cuadrática.

$$ax^2 + bx + c = 0; a \neq 0$$

Reemplazando este valor, resulta la condición necesaria y suficiente: $a + b + c = 0$

2.4. Teorema de VIETA:

$$\text{Si: } x^2 + px + q = 0;$$

$$\text{Raíces: } x_1, x_2 = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}; p = -(x_1 + x_2); q = x_1 \cdot x_2$$

Ecuaciones Bicuadradas

1. Definición:

Definimos como ecuación bicuadrada las ecuaciones escritas de la forma siguiente:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

Donde:

$a; b \wedge c \in \mathbb{R} \wedge a \neq 0$; $a; b \wedge c$; Son coeficientes numéricos.

Ejemplos:

$$3x^4 - x^2 + 8 = 0$$

$$-2x^4 - \frac{2}{7}x^2 + 10 = 0$$

2. Solución:

$$x = \pm \sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

2.1. Suma de raíces: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$

2.2. Producto de raíces: $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = \frac{c}{a}$

2.3. Producto de dos en dos: $x_1 \cdot x_2 + x_3 \cdot x_4 = \frac{b}{a}$

2.4. Formación de una ecuación bicuadrada:

$$x^4 + (x_1 \cdot x_2 + x_3 \cdot x_4)x^2 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = 0$$

2.5. Si:

$$x_1 = N \Rightarrow x_2 = -N$$

$$x_2 = M \Rightarrow x_4 = -M$$

Ecuaciones Polinómicas

1. Ecuación polinómica. Expresión algebraica de la forma:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0$$

Donde: $a_0; a_1; a_2; \dots a_n$, son coeficientes reales; $n \in \mathbb{Z}^+$

Esta ecuación es de grado " n " si y sólo si: $a_n \neq 0$ / a_n = coeficiente principal

2. Ecuación de grado superior.

2.1. Teorema fundamental del álgebra. Sea la ecuación polinomial.

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0$$

"Toda ecuación polinomial tiene por lo menos una raíz ya sea real o compleja"

2.1.1. Teorema del factor: si el polinomio $P(x)$ se anula para $x = a$, entonces $(x - a)$ es un factor de $P(x)$ y, por consiguiente " a " es una raíz de dicho polinomio.

2.2. Corolario. Toda ecuación polinomial de grado " n " tiene exactamente " n " raíces contadas con su respectiva multiplicidad.

Sean las raíces de $P(x)$, polinomio de grado " n " con coeficiente principal " a_n "

$$x_1; x_2; x_3; x_4; \dots x_n$$

El polinomio puede expresarse de la siguiente manera:

$$P(x) = a_n (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_n) / a_0 =$$

3. Teorema de CARDANO-VIETA.

$$P(t) = a.x^n + b.x^{n-1} + c.x^{n-2} + d.x^{n-3} + \dots + px + q = 0 / a \neq 0$$

Cuyas raíces son: $x_1; x_2; x_3; x_4; \dots x_n$; entonces:

3.1. Suma de raíces: $S_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \dots + x_n = -\frac{b}{a}$

3.2. Suma de productos

binarios: $S_2 = x_1.x_2 + x_2.x_3 + x_3.x_4 + x_4.x_5 + \dots + x_{n-1}.x_n = \frac{c}{a}$

3.3. Suma de productos ternarios:

$$S_3 = x_1.x_2.x_3 + x_2.x_3.x_4 + x_3.x_4.x_5 + x_4.x_5.x_6 + \dots + x_{n-2}.x_{n-1}.x_n = -\frac{d}{a}$$

3.4. Producto de raíces:

$$S_n = x_1.x_2.x_3.x_4 \dots x_n = (-1)^n \frac{q}{a}$$

Importante: este teorema nos permite tener relaciones numéricas entre las raíces de una

Ecuaciones Polinómicas: Propiedades

1. Teoremas sobre las pariedades de las raíces.

1.1. Pariedad de raíces imaginarias:

Toda ecuación polinomial de coeficientes reales que tenga una raíz compleja de la forma:

$a + bi$ donde: $a, b \in \mathbb{R} \wedge i = \sqrt{-1}$. Tendrá necesariamente por raíz al complejo conjugado de la raíz inicial es decir: $a - bi$; ($b \neq 0$)

1.2. Pariedad de raíces irracionales:

Si una raíz del polinomio $P(x)$ de coeficientes racionales, es el número irracional: $a + \sqrt{b}$

($a; b \in \mathbb{Q} \wedge b > 0 \wedge \sqrt{b} \in \mathbb{Q}$), entonces necesariamente otra raíz de la ecuación será el irracional conjugado: $a - \sqrt{b}$.

Observación: todas las raíces imaginarias de una ecuación polinomial, con coeficientes reales, se presentan por pares, las cuales son dos a dos números imaginarios y conjugados. Por ello, el número de raíces imaginarias de este tipo de ecuaciones es par.

1.3. Tetraridad de las raíces irracionales:

Si una ecuación polinomial $P_n(x) = 0$; con coeficientes racionales, admite la raíz irracional

($\sqrt{a} + \sqrt{b}$), donde $a \wedge b$, son racionales positivos no cuadrados perfectos ($\sqrt{a}, \sqrt{b}$), son irracionales entonces, su irracional conjugado ($\sqrt{a} - \sqrt{b}$), su opuesto ($-\sqrt{a} - \sqrt{b}$), y el conjugado de su opuesto ($-\sqrt{a} + \sqrt{b}$), también son raíces de dicha ecuación.

1.4. Ternaridad de las raíces complejas:

Si una ecuación polinomial $P_n(x) = 0$, con coeficientes racionales, admite la raíz irracional $\sqrt[3]{a}$, donde a es un racional no cubo perfecto, entonces $\sqrt[3]{aw}$ y su conjugada $\sqrt[3]{aw^2}$, también son raíces de dicha ecuación; siendo " w " una de las raíces cúbicas imaginarias de la unidad.

1.5. Teorema de BOLZANO (teorema del valor intermedio):

Este teorema es aplicable para funciones continuas, aquí lo aplicaremos para polinomios. "En todo polinomio $P(x)$, de coeficientes reales, si: $P(a).P(b) < 0$, entonces existe al menos una raíz real $x_0 \in \langle a; b \rangle$ ".

Ejemplo:

$$\text{Sea: } P(x) = 2x^3 - 15x^2 - 28x + 40$$

Se observa que:

$$P(0) = 2(0)^3 - 15(0)^2 - 28(0) + 40 = 40 \Rightarrow P(0) > 0$$

$$P(1) = 2(1)^3 - 15(1)^2 - 28(1) + 40 = -1 \Rightarrow P(1) < 0$$

Como $P(0).P(1) < 0$; entonces existe al menos una raíz x_0 ; de $P(x)$, en el intervalo $\langle 0; 1 \rangle$

Matrices

1. Definición:

Es un conjunto de elementos (números, funciones, vectores, etc.) dispuestos en forma rectangular y además ordenados en fila y columnas.

A las matrices se les denota con letra mayúscula y se le encierra entre paréntesis o corchete.

2. Notación General:

Se simboliza cada elemento con subíndices de la forma a_{ij} donde i representa a la fila donde se encuentra y j la columna.

Así la matriz de " m " filas y " n " columnas cuyos elementos son a_{ij} es:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{3n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & a_{m,n} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

Columns

Filas

Que abreviadamente se representa por:

$$A = (a_{ij})_{m \times n}$$

Donde:

m = número de filas

n = número de columnas

$$\{m; n\} \subset N$$

$$i = 1; 2; 3; 4; \dots; m$$

$$j = 1; 2; 3; 4; \dots; n$$

A es la matriz de " m " filas y " n " columnas. a_{23} es un elemento de la matriz A. ubicado en la fila 2 y la columna 3.

Orden de una Matriz

1. Observaciones:

1.1. Las matrices usualmente se denotan por las letras mayúscula:

$$A; B; C; D; E; \dots; Z$$

1.2. Para la notación de una matriz en la forma general.

Sus elementos se designan con letras minúsculas a_{ij} que vienen acompañadas de dos subíndices, donde el primer subíndice (i) indica el número de la fila y el segundo (j) el número de la columna en la cual se encuentra ubicado dicho elemento.

Ejm.

Columna j ($j=2$)

↓

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 10 & -5 \\ 7 & 8 & 11 & -1 \\ 6 & 7 & -9 & -4 \\ 3 & 1 & 4 & -7 \\ 12 & 13 & -6 & 9 \end{bmatrix}_{5 \times 4}$$

← Fila i ($i=3$)

2. Orden de una Matriz:

Es una característica de toda matriz viene dado por la multiplicación indicada del número de filas y el número de columnas de dicha matriz, así si la matriz tiene " m " filas y " n " columnas, diremos que la matriz es de orden $m \times n$.

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{3n} \\ \vdots & & & \\ b_{m1} & b_{m2} & b_{m3} & b_{m,n} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

Por consiguiente el orden de $B = m \times n$

Ejemplo:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 10 \\ -4 & 3 & 0 & 4 & -9 \end{bmatrix}_{2 \times 5}$$

Entonces, será de orden 2×5 , pues tiene 2 filas y 5 columnas

Matrices

Matrices Especiales

1. Matriz Columna:

Es aquella matriz que tiene una sola columna, es decir es de orden " $m \times 1$ "

$A = (a_{ij})_{m \times n}$ Es una matriz columna si:

$n = 1$ o bien

$A = (a_{ij})_{m \times 1}$

$$A = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}_{3 \times 1} \quad F = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \\ 8 \end{bmatrix}_{4 \times 1} \quad G = \begin{bmatrix} 10 \\ -4 \\ 1 \\ 12 \\ 0 \end{bmatrix}_{5 \times 1}$$

2. Matriz Fila:

Es aquella que tiene una sola fila, es decir es de orden " $1 \times n$ "

$A = (a_{ij})_{m \times n}$, es una matriz fila si; $m = 1$ o bien.

$A = (a_{ij})_{1 \times n}$

$$C = [-12 \quad 2 \quad -9 \quad 7]_{1 \times 4} ; H = [-15 \quad 10 \quad 11]_{1 \times 3}$$

$$W = [-13 \quad 0 \quad 15 \quad 8 \quad 9 \quad 17]_{1 \times 6}$$

3. Matriz Rectangular:

Son aquellas matrices donde el número de filas es distinta al número de columnas:

Esto es:

La matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$

Es rectangular si; $m \neq n$.

$$T = \begin{bmatrix} 10 & 9 & -1 & 10 & 13 \\ -14 & 8 & 11 & 6 & -9 \end{bmatrix}_{2 \times 5}$$

Es una matriz rectangular de orden 2×5 .

Matrices

Matrices Especiales

1. Matriz Nula:

Es aquella matriz cuadrada o rectangular en donde todos sus elementos son ceros, es decir, una matriz.

$A = (a_{ij})_{m \times n}$, es nula, si: $a_{ij} = 0$; $\forall ij$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

A es una matriz rectangular nula de orden 2x2; F es una matriz rectangular nula de orden 2x3; K es una matriz rectangular de orden 3x3.

2. Matriz Cuadrada:

Esta matriz se caracteriza por tener igual cantidad de filas y columnas, por consiguiente es una matriz de orden "n x n" o simplemente es una matriz de orden n, y se denota.

$$A = (a_{ij})_{n \times n}$$

$$A = (a_{ij})_n$$

$$W = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 9 & 2 \\ 7 & 5 & 8 \end{bmatrix}; \quad T = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \chi & \delta \\ \varepsilon & \phi & \varphi & \gamma \\ \eta & \lambda & \mu & \pi \\ \rho & \tau & \omega & \psi \end{bmatrix}$$

Toda matriz cuadrada posee diagonal principal y diagonal secundaria.

Consideremos la matriz T

Diagonal Principal: $(\alpha \ \phi \ \mu \ \psi)$; Diagonal Secundaria: $(\rho \ \lambda \ \varphi \ \delta)$

3. Trazo de una Matriz Cuadrada:

Es la suma de los elementos de su diagonal principal

$$A = (a_{ij}) \Rightarrow \text{Traz}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

Ejemplo:

$$\text{Traz}(W) = 2 + 9 + 8 = 19$$

Matrices

Casos Particulares de una Matriz Cuadrada

1. Matriz Diagonal:

Una matriz cuadrada $A = (a_{ij})_{n \times n}$ es una matriz diagonal

Si $a_{ij} = 0, \forall i \neq j$, es decir, si todos sus elementos son ceros a excepción de por lo menos un elemento de la diagonal principal.

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}_{3 \times 3} \quad F = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \end{bmatrix}_{4 \times 4}$$

2. Matriz Escalar:

Es aquella matriz diagonal donde todos los elementos de la diagonal principal.

Son iguales a un número distinto de cero, así: la matriz $A = (a_{ij})_{n \times n}$ es una matriz escalar si:

$$a_{ij} = \begin{cases} k; i = j \\ 0; i \neq j \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & k \end{bmatrix}$$

Ejemplo:

$$E = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \end{bmatrix}_{4 \times 4}$$

Matrices

Casos Particulares de una Matriz Cuadrada

1. Matriz Identidad:

Es una matriz cuadrada de orden n denotado por I ó I_n cuyos elementos de su diagonal principal son todos, iguales a uno y los elementos fuera de la diagonal principal son todos iguales a cero.

$I = I_n = (a_{ij})$, Donde:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1; i = j \\ 0; i \neq j \end{cases}$$

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 3} \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

2. Matriz Triangular:

Es aquella donde todos los elementos a un lado de la diagonal principal son ceros y al lado opuesto al menos uno no es cero.

2.1. Matriz triangular superior.

Una matriz cuadrada $A = (a_{ij})_{n \times n}$

Es triangular superior si: $a_{ij} = 0, \forall i > j$, esto es cuando los elementos que se encuentran por debajo de la diagonal principal son ceros.

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 5 \\ 0 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

2.2. Matriz triangular inferior; es aquella matriz, cuyos elementos que se encuentran encima de la diagonal principal son iguales a cero. Es decir: $A = (a_{ij})_{n \times n}$ es una matriz triangular inferior: Si;

$$a_{ij} = 0, \forall i < j$$

$$F = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 7 & 1 & 4 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

Matrices

Casos Particulares de una Matriz Cuadrada

1. Transpuesta de una Matriz:

La transpuesta de una matriz A , se denota por A^t , se define como aquella matriz constituida a partir de la Matriz A , intercambiando sus filas por sus respectivas columnas, conservando todos sus elementos-
Si:

$$A = (a_{ij})_{m \times n} \Rightarrow A^t = (a_{ij})_{n \times m}; \forall \{i; j\}$$

Observación:

Si la matriz " A " es de orden $m \times n$, su transpuesta (A^t) será de orden $n \times m$.

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 9 \\ 5 & 4 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}_{3 \times 2} \Rightarrow A^t = \begin{bmatrix} 8 & 5 & -3 \\ 9 & 4 & 7 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

2. Propiedades:

$$a). (A \pm B)^t = A^t \pm B^t$$

$$b). (A^t)^t = A$$

$$c). (kA)^t = k \cdot A^t \quad / \quad k = \text{escalar}$$

$$d). (A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$$

$$e). \text{Traza } A = \text{Traza } A^t$$

3. Matriz Simétrica:

Una matriz cuadrada $A = (a_{ij})_{n \times n}$ es simétrica si: $a_{ij} = a_{ji}$, esto es, los elementos dispuestos simétricamente a la diagonal principal son iguales.

Observación

Si una matriz es igual a su transpuesta, se llama matriz simétrica,

Si: $A = A^t \Rightarrow A$ es simétrica

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}_{3 \times 3} \Rightarrow A^t = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

Como:

$$A = A^t \Rightarrow A \text{ Es simétrica}$$

Matrices

Casos Particulares de una Matriz Cuadrada

1. Matriz Antisimétrica:

Una matriz cuadrada $A = (a_{ij})_{n \times n}$ es antisimétrica Si: $a_{ij} = -a_{ji}, \forall i, j$; esto es, los elementos dispuestos simétricamente, con respecto a la diagonal principal, son de signos opuestos.

Observación

Si una matriz es igual al negativo de su transpuesta, se llama antisimétrica.

Si: $A = -A^t \Rightarrow A$ es antisimétrica

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -4 \\ -3 & 4 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 3} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 4 \\ -3 & -4 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 3} \Rightarrow A^t = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -4 \\ -3 & 4 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

Como: $A = -A^t \Rightarrow A$ es antisimétrica

2. Matriz Opuesta:

Dos matrices son opuestas si son del mismo orden y además sus respectivos elementos son opuestos:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 6 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 3} \Rightarrow \text{Su opuesto es:}$$

$$-A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 0 & -6 & 1 \\ -1 & -4 & -1 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

2.1. Propiedades:

Sean A y B matrices cuadradas de orden "n"

a). Si: $B = \frac{A + A^t}{2} \Rightarrow B$ es simétrica

b). Si: $B = \frac{A - A^t}{2} \Rightarrow B$ es antisimétrica

c) Toda matriz cuadrada A se puede expresar como la suma de una simétrica y otra antisimétrica

$$A = \underbrace{\frac{A + A^t}{2}}_{\text{Simétrica}} + \underbrace{\frac{A - A^t}{2}}_{\text{Antisimétrica}}$$

Operaciones con Matrices

1. Adición de Matrices: Sean las matrices A y B, $A = (a_{ij})_{m \times n}$ y $B = (b_{ij})_{m \times n}$, la suma de A y B es la matriz A+B de orden $m \times n$ obtenida al sumar los elementos correspondientes de las matrices (elementos homólogos).

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

Nota: La suma de matrices se puede efectuar si los sumandos tienen igual orden.

2. Propiedades: Si $A, B, C \wedge 0$; son matrices del mismo orden, además 0 representa la matriz nula, entonces:

$$A + B = B + A \dots \text{Ley conmutativa}$$

$$(A + B) + C = A + (B + C) \dots \text{Ley asociativa}$$

$$A + 0 = 0 + A \dots \text{Elemento neutro aditivo}$$

$$A + (-A) = 0 \dots \text{Inverso aditivo}$$

3. Sustracción de Matrices:

Si A y B son matrices del mismo orden, entonces $A - B$ es la matriz en la que cada elemento es la resta de los elementos de la misma fila y columna de A y B.

Si A y B son del mismo orden:

$$A - B = A + (-1)B$$

$$A - B = (a_{ij} - b_{ij})_{m \times n}$$

4. Multiplicación de un escalar por una matriz.

Dados una matriz $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ y un escalar K, el producto de K y A es la matriz:

$$K \cdot A = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2n} \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \dots & ka_{mn} \end{bmatrix}$$

Si:

$$A = [a_{ij}]_{m \times n} \Rightarrow KA = (ka_{ij})_{m \times n} / K \in R$$

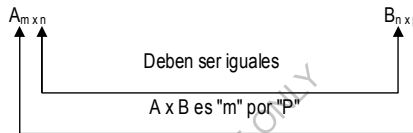
Multiplicación de Matrices

1. Multiplicación de dos matrices:

Dadas 2 matrices $A = (a_{ij})_{m \times n}$ y $B = (b_{jk})_{n \times p}$ existe una tercera matriz $C = (C_{ik})_{m \times p}$, que representa el producto de multiplicar las matrices A y B; donde C_{ik} es el producto de multiplicar la fila i de la primera matriz por la columna "k" de la segunda matriz:

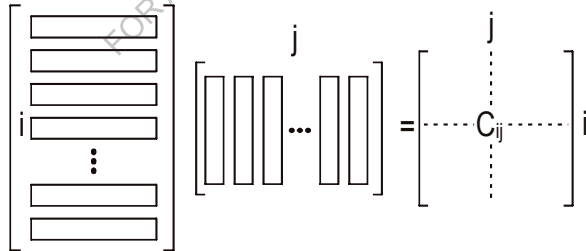
$$A \times B = (C_{ik})_{m \times p} / C_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \times b_{jk}$$

$A \times B$ existe si sólo si el número de columnas de la primera matriz es igual al número de filas de la segunda matriz.



2. Regla de cálculo:

Si: $A \times B = C$, un elemento de la matriz de producto será igual al producto de la fila i de la matriz A y de la columna j de la matriz B.



3. Propiedades:

Sean A, B y C matrices para los cuales están definidas las operaciones de adición y multiplicación y r escalares.

3.1. $k(A+B) = kA + kB$; 3.2. $(k+r) \cdot A = kA + rA$; 3.3. $k(r \cdot A) = (k \cdot r) \cdot A$; 3.4. $A(B \cdot C) = (A \cdot B) C$

3.5. $A(B+C) = AB + AC$; 3.6. $A \cdot B = 0$, no implica que $A = 0$ y $B = 0$

3.7. $A \cdot B = AC$, no implica que $B = C$; 3.8. En general " AB " no es necesariamente igual a " BA "

Potenciación de Matrices

1. Definición.

Sea A una matriz cuadrada de orden $n \in \mathbb{N}$, definimos:

$$A^n = \begin{cases} 1; n = 0; A \neq 0 \\ A; n = 1 \\ \underbrace{A.A.A...A}_{\text{"n" veces}}; n \in \mathbb{N}; n \geq 2 \end{cases}$$

2. Propiedades.

La potenciación de matrices es conmutativa. De donde se tendrá.

2.1. Si A es una matriz cuadrada

$$\Rightarrow A^m \times A^n = A^n \times A^m; m, n \in \mathbb{N}$$

2.2. si A y B conmutan $\Rightarrow A^m$ y B^n conmutan siendo m, n naturales

2.3. Si A es una matriz cuadrada

$$(A^m)^n = A^{m \cdot n} = (A^n)^m; m, n \in \mathbb{N}$$

$$2.4. AI = IA = A$$

$$2.5. I^n = I$$

$$2.6. (A \pm B)^t = A^t \pm B^t$$

$$2.7. (A^t)^t = A$$

$$2.8. (\lambda \cdot A)^t = \lambda \cdot A^t; \lambda = \text{escalar}$$

$$2.9. (A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$$

$$2.10. [(A^t)^t]^t = A^t$$

3. Ejemplos:

Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, Calcular A^n

Por inducción:

$$A^1 = A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\vdots$

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Potenciación de Matrices

1. Matrices Relacionadas con la potenciación

1.1. Matriz Involutiva

Sea la Matriz A_n :

$$A \text{ es Involutiva} \Rightarrow A^2 = I_n$$

1.2. Matriz Nilpotente

Sea la matriz A_n :

$$A \text{ es nilpotente} \Rightarrow A^2 = 0$$

1.3. Matriz Idempotente:

Sea la matriz A_n :

$$A \text{ es idempotente} \Rightarrow A^2 = A$$

1.4. Matriz Real

Es aquella matriz cuyos elementos son reales

$$A = (a_{ij})_{n \times m}; a_{ij} \in R \Rightarrow A = \overline{A}$$

1.5. Matriz Conjugada

Es aquella matriz donde sus elementos son el conjunto de los elementos de otra matriz.

$$A = (a_{ij})_{n \times m}; \overline{A} = (\overline{a_{ij}})_{n \times m}$$

1.6. Matriz Hermitiana

Dada una matriz cuadrada de elementos complejos se llama hermitiana si dicha matriz es igual a la transpuesta de su matriz conjugada es decir.

Sea:

$$A = (a_{ij})_{n \times n}; \text{ es hermitiana si:}$$

$$A = (a_{ij})^t_{n \times n}$$

De donde se concluye que los elementos de la diagonal principal son necesariamente reales.

1.7. Matriz Antihermitiana.

Una matriz cuadrada de elementos complejos se llama antihermitiana si es igual al negativo de la transpuesta de su matriz conjugada.

Es decir:

$$A = (a_{ij})_{n \times n} \wedge (\overline{A})^t = \left[(a_{ij})^t \right]_{n \times n}$$

$\Rightarrow A$ es antihermitiana

Matriz de Cofactores

1. Matriz de Cofactores:

Si A es una matriz cuadrada de orden " n " el cofactor del elemento a_{ij} se denota por c_{ij} y se define:

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$$

Si:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

El factor de a_{23} es:

$$C_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = (-1)^5 \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

En general:

Considérese la matriz cuadrada de orden n .

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1j} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2j} & a_{2n} \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{ij} & a_{in} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nj} & a_{nn} \end{bmatrix} \rightarrow \text{Fila } i$$

↑
Columna j

Denotaremos por M_{ij} a la matriz cuadrada de orden $(n-1)$ que resulta de eliminar la fila i y la columna j de la matriz A , luego.

I) al determinante de la matriz M_{ij} ($|M_{ij}|$) se llamará menor elemento a_{ij} de la matriz A .

II) Se define cofactor del elemento a_{ij} denotado por A_{ij} .

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|$$

El signo que relaciona a a_{ij} y $|M_{ij}|$ del elemento a_{ij} de la matriz A se puede hallar en forma práctica mediante el siguiente arreglo.

$$\begin{bmatrix} + & - & + & \dots \\ - & + & - & \dots \\ + & - & + & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$$

Matriz Inversa

1. Matriz inversa:

En algunas matrices puede identificarse otra matriz denominada matriz inversa. La relación entre una matriz A y su inversa (denotada por A^{-1}) es que el producto de A por A^{-1} en uno y otro orden da origen a una matriz identidad, es decir:

$$A.A^{-1} = A^{-1}.A = I$$

OBSERVACIONES:

- ❖ Para que una matriz pueda tener, inversa debe ser cuadrada.
- ❖ La inversa de A también debe ser cuadrada y de la misma dimensión de A .
- ❖ No toda matriz cuadrada posee inversa.
- ❖ Si A posee inversa se le llama no singular o inversible.
- ❖ Si A no posee inversa se le llama singular o no inversible

2. Definición:

Sea A una matriz cuadrada no singular si existe una única matriz B cuadrada del mismo orden, tal que $A.B = B.A = I$ entonces definen B como matriz inversa de A y lo denotamos por A^{-1} .

3. Teorema

$$\exists A^{-1} \Leftrightarrow |A| \neq 0 \wedge A.A^{-1} = A^{-1}.A = I$$

4. Cálculo de la Matriz Inversa:

4.1. Orden uno:

$$A = (a) \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{a}; a \neq 0$$

4.2. Orden dos:

Si:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} a & -b \\ -c & a \end{bmatrix}; |A| \neq 0$$

Matriz Inversa: Método de Gauss

1. Matriz Inversa:

Método de GAUSS Jordán

Para determinar la inversa de una matriz cuadrada A se sigue los siguientes pasos:

1.1. Se forma la matriz ampliada compuesta por la matriz A y la matriz identidad del mismo, orden de A, lo cual da como resultado.

$$[A|I]$$

Ejemplo: para una matriz de orden 3, la disposición sería la siguiente:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 10 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & -1 & 8 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 11 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

1.2. Se efectúan las operaciones solo por filas en toda la matriz ampliada de manera que A se transforme en una matriz identidad.

La matriz resultante presentará la forma $[I|A^{-1}]$ de donde A^{-1} se puede leer a la derecha de la línea.

$[A|I] \Rightarrow$ Mediante operaciones fundamentales de filas (O.F.F.) se obtiene

$$[I|B] \Rightarrow A^{-1} \cdot B$$

2. Observaciones:

2.1. Si la matriz no tiene inversa, no será posible transformar A en una matriz identidad.

2.2. No todas las matrices cuadradas poseen inversas, pero si la poseen es única.

2.3. La posibilidad de existencia de la matriz A^{-1} se denota de la siguiente manera:

a). $A^{-1} \exists \Leftrightarrow A - I$ (Gauss - Jordan)

b). $A^{-1} \exists \Leftrightarrow A_{n \times n} X = B$; (Tienen solución única).

c). Si el proceso de reducción conduce a una fila nula en la parte correspondiente a la matriz A, entonces A es singular.

2.4. En el álgebra matricial la operación de división no existe; está es reemplazada de alguna forma por la inversión es decir:

$$AX = B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$$

Matriz Inversa: Método de Adjuntas

1. PROPIEDADES

Sea, A y B matrices cuadradas no singulares y λ , un escalar distinto de cero:

$$1.1. Ax A^{-1} = A^{-1} x A = I$$

$$1.2. (A.B)^{-1} = B^{-1} . A^{-1}$$

$$1.3. (A^{-1})^{-1} = A$$

$$1.4. (\lambda . A)^{-1} = \lambda^{-1} . A^{-1}$$

$$1.5. |A^{-1}| = |A|^{-1} = \frac{1}{|A|}$$

1.6. Si $A . A^t = I$; Se dice que A es ortogonal.

$$1.7. (I^{-1})^{-1} = I$$

$$1.8. (A^{\lambda})^{-1} = (A^{-1})^{\lambda}$$

$$1.9. (A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$$

2. Adjunta de una matriz.

A la transpuesta de la matriz de cofactores se le llama adjunta de la matriz A .

$$Adj A = [Cof(A)]^t$$

Ejm.

Sea la Matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$a_{11} = 7; a_{12} = -1; a_{21} = -6; a_{22} = 8$$

$$Matriz - Cof A = A = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ -6 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow Adj A = \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ -1 & 8 \end{bmatrix}$$

2.1. Propiedad: Sea A una matriz invertible entonces la matriz inversa está dada por:

$$A^{-1} = \frac{Adj A}{|A|}$$

2.2. Observación

$$|Adj A| = |A|^{n-1}; \text{ Donde } n \text{ es el orden de la matriz } A.$$

Determinantes

1. Determinante: Se llama determinante, a un valor escalar o número real que se le asocia a cada matriz cuadrada y se denota por: $|A|$ ó $\det(A)$ para indicar el determinante de una Matriz A.

2. Matriz de orden uno:

Se llama determinante de una matriz de primer orden, formado por el elemento a_{11} , al propio elemento a_{11} .

Ejemplo; Si $A = [6] \Rightarrow |A| = 6$

3. Matriz de orden dos:

Sea la matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$; se define su determinante. $|A| = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$

4. Determinante de tercer orden:

Sea:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

4.1. Método Menores complementarios:

$$|A| = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$|A| = a_{11}(a_{22} \cdot a_{33} - a_{32} \cdot a_{23}) - a_{12}(a_{21} \cdot a_{33} - a_{31} \cdot a_{23}) + a_{13}(a_{21} \cdot a_{32} - a_{31} \cdot a_{22})$$

4.2. Regla de Sarrus Vertical.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow A^* = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

Pasos:

a) Se repiten las filas primera y segunda a continuación de la tercera (formando dos filas adicionales)

b) Se toman con signo positivo la diagonal principal (hacia abajo) y las dos paralelas a ella y con signo negativo la diagonal secundaria (hacia arriba) y las dos paralelas a la misma.

c) Se efectúan los productos de los elementos de las diagonales y sus paralelas, considerando para cada producto el signo señalado en el paso anterior.

$$|A| = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{13} + a_{31} \cdot a_{12} \cdot a_{23} - (a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} + a_{11} \cdot a_{32} \cdot a_{23} + a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33})$$

Determinantes: Regla de Sarrus

1. Regla de Sarrus Horizontal:

Se aplica la matriz trasladando las dos primeras columnas a la parte final y se aplican multiplicaciones en dirección de las diagonales, conforme se indica.

Sea la matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow A^* = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

$$|A| = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - (a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} + a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11} + a_{33} \cdot a_{21} \cdot a_{12})$$

2. Método de la estrella:

Sea la matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{21}a_{12}a_{33} + a_{11}a_{32}a_{23})$$

3. Método de Operaciones elementales:

Sea la matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Por operaciones elementales de filas y columnas se consigue la matriz modificada siguiente:

$$A^* = \begin{bmatrix} 1 & a_{12}^* & a_{13}^* \\ 0 & a_{22}^* & a_{23}^* \\ 0 & a_{32}^* & a_{33}^* \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |A| = a_{22}^* \cdot a_{33}^* - a_{32}^* \cdot a_{23}^*$$

IMPORTANTE: Tener en cuenta el signo de la matriz de cofactores.

Determinantes

Propiedades de los Determinantes

1. Una matriz cuadrada y su transpuesta tienen el mismo determinante.

Es decir: $|A| = |A'|$; siendo A cuadrada.

2. Si se intercambia dos filas o columnas, consecutivas de una matriz cuadrada, su determinante sólo cambia de signo.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow A^* = \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = \lambda \Rightarrow |A^*| = -\lambda$$

3. Si una matriz cuadrada tiene los elementos de dos filas o dos columnas, respectivamente proporcionales; se dirá que su determinante es cero. Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 6 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = 0$$

4. Si se multiplican todos los elementos de una fila (o columna) del determinante por un escalar, el mismo determinante queda multiplicado por dicho escalar.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 6 & 5 & 2 \\ 9 & 8 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow A = 3 \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 8 & 3 \end{bmatrix}$$

5. Un determinante en el cual todos los elementos de una fila o columna son ceros, es igual a cero.

6. El determinante de una matriz triangular superior o inferior, y de una matriz diagonal es igual al producto de los elementos de la diagonal principal.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 4 & 6 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = (1)(4)(7) = 28$$

7. El determinante de una matriz antisimetría de orden impar es igual a cero.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -8 \\ -4 & 0 & 7 \\ 8 & -7 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = 0$$

$$8. |A \cdot B| = |A| \cdot |B|$$

$$9. |kA| = k^n |A|, k \text{ es escalar, } n \text{ es el orden de la matriz } A. |A^n| = |A|^n, n \in \mathbb{N}$$

Sistemas de Ecuaciones

1. Definición: Se llama así al conjunto de ecuaciones lineales con dos o más incógnitas, las cuales pueden verificarse para algunos valores asignados a sus incógnitas o tal vez nunca se verifiquen.
Ejemplos:

$$\begin{cases} 3x - 4y = 10 \\ 5x - 6y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 12 \\ 2x - 5y + 3z = 3 \\ 8x - 9y + z = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 5y - z + 8w = 0 \\ x - y + z + 3w = 2 \\ 8x - 9y - 7z + 2w = 6 \\ x - 10y + 11z - 4w = 12 \end{cases}$$

2. Solución de un sistema: La solución de un sistema de ecuaciones, si existe, depende de la cantidad de incógnitas, es decir:

2.1. Si el sistema tiene 2 incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

Una solución del sistema de existir será de la forma:

$(x_0; y_0)$, llamado par ordenado.

2.2. Si el sistema tiene 3 incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

Una solución será de la forma: $(x_0; y_0; z_0)$, llamada Terna Ordinaria

2.3. Así en general, si el sistema tiene n incógnitas, una solución será de la forma: $(x_0; y_0; \dots; w_0)$, de n elementos, llamada n -ada ordenada.

3. Conjunto solución: es el conjunto formado por todas las soluciones del sistema.

Sistemas de Ecuaciones Equivalentes

1. Sistemas equivalentes: Son aquellas que a pesar de tener ecuaciones, diferentes acepten las mismas soluciones

1.1. Si una ecuación del sistema se multiplica por un número real, no nulo se obtiene un sistema equivalente al primero:

Ejemplo:

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x + 3y = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - 3y = 3 \\ x + 2y = 5 \end{cases} \Rightarrow C.S. = \{2; 1\}$$

1.2. Si una ecuación de un sistema se sustituye por la suma de ella con otras ecuaciones del sistema previamente multiplicadas por números cualesquiera, se obtiene un sistema equivalente al primero.

Ejemplo:

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x + 3y = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ 4x = 5 \end{cases} \Rightarrow C.S. = \{2; 1\}$$

1.3. Si un sistema de ecuaciones se despeja una variable en una de las ecuaciones y la expresión resultante, se sustituye en los demás, el sistema que resulta es equivalente al primero.

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x + 3y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 1 + y = 1 \\ x + 3y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + y \\ (1 + y) + 3y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + y \\ 4y = 4 \end{cases} \Rightarrow C.S. = \{2; 1\}$$

1.4. Si en un sistema hay una ecuación que es consecuencia de otras varias, se puede suprimir y resulta un sistema equivalente al dado.

Ejemplo:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + y = 3 \\ 4x + 3y = 5 \end{cases}$$

La tercera ecuación se obtiene multiplicando a la primera por 2 y sumándole la segunda. Se dice que la tercera ecuación es consecuencia de las primeras, o también que la tercera ecuación es combinación lineal de las otras dos. La tercera ecuación se puede suprimir o el sistema que queda es equivalente al primero.

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x + 3y = 3 \end{cases} \Rightarrow C.S. = \{2; -1\}$$

Clases de Sistemas de Ecuaciones

I. De acuerdo a la solución: Los sistemas se clasifican en compatibles o incompatibles dependiendo si existe o no solución.

A. Sistemas compatibles:

1. Compatible determinado: Un sistema se llamará compatible determinado si presenta al menos una solución o hay un número finito de soluciones.

2. Sistema compatible indeterminado: Es aquel sistema que tiene infinitas soluciones.

B. Sistemas incompatibles o inconsistentes; es aquel sistema que no tiene solución, se dirá que su conjunto solución es el vacío.

Ejemplo:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 7 \end{cases}$$

No tiene solución, porque no es posible encontrar dos números reales cuya suma de 1 y, a la vez de 7. En este caso decimos que el sistema no tiene solución, o que es un sistema inconsistente o incompatible.

II. De acuerdo al tipo de ecuaciones:

Los sistemas pueden ser lineales o no lineales,

A. Sistemas lineales:

Son aquellos sistemas donde cada una de las ecuaciones son lineales. Esta denominación se debe a que en la geometría analítica, estas ecuaciones determinan un recta.

Ejemplo:

$$\begin{cases} -x + 3y - 4z = -17 \\ -3x + 3y = 10 \\ 3x + 5y - 8z = 2 \end{cases}$$

B. Sistema no lineal. Es aquel sistema donde, al menos una de las ecuación es no lineal. Ejemplo:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Sistemas de Ecuaciones Lineales con dos Incógnitas.

Un sistema de dos ecuaciones con dos variables es de la forma:

$$\begin{cases} a_1 + b_1 y = c_1 \\ a_2 + b_2 y = c_2 \end{cases}$$

1. Método de sustitución: Se sigue los siguientes pasos.

- 1.1. Despejar una de las incógnitas del sistema (x e y)
- 1.2. Sustituir la incógnita despejada en la otra ecuación del sistema obteniendo así una ecuación con una incógnita.
- 1.3. Resolver la ecuación obtenida.
- 1.4. Sustituir la solución obtenida en la expresión de la otra incógnita. Ejemplo:

$$\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 2x + 2y = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 - 3y \\ 2(5 - 3y) + 2y = 6 \end{cases} \Rightarrow 2(5 - 3y) + 2y = 6 \Rightarrow y = 1 \wedge x = 2$$

2. Método de igualdad: Se sigue los siguientes pasos

- 2.1. Despejar en las ecuaciones la misma variable
- 2.2. Igualar las dos expresiones de la variable despejada.
- 2.3. Resolver la ecuación obtenida.
- 2.4. Sustituir la solución en cualquiera de las expresiones de la otra incógnita. Ejemplo:

$$\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 2x + 2y = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 - 3y \\ x = 3 - y \end{cases} \Rightarrow 5 - 3y = 3 - y \Rightarrow y = 1 \wedge x = 2$$

3. Método de Reducción: Se sigue los siguientes pasos:

- 3.1. Multiplicar los dos miembros de las dos ecuaciones por ciertos números, de tal forma que los coeficientes de una incógnita sean opuestos.
- 3.2. Sumar las dos ecuaciones, miembro a miembro.
- 3.3. Resolver la ecuación obtenida.
- 3.4. Sustituir la solución obtenida en cualquiera de las dos ecuaciones y hallar la otra incógnita. Ejemplo:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 2x - 3y = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 2x - 2y = 7 \end{cases} \Rightarrow x = 3 \wedge y = -\frac{1}{3}$$

$$\frac{4x}{4x} = \frac{12}{12}$$

4. Regla de Cramer: Sea el sistema: $\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases}$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta_s} = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}; y = \frac{\Delta_y}{\Delta_s} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}; \text{Donde :}$$

Δ_x = Determinante de x; Δ_y = Determinante de y; Δ_s = Determinante del sistema; $\Delta_s \neq 0$

Sistemas de Ecuaciones Lineales con tres Incógnitas.

Toman la siguiente forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

Métodos de Solución

1. Método algebraico: Para los sistemas con tres incógnitas es el más usado.
Ejemplo:

$$\begin{cases} x + y - z = -1 \dots (1) \\ 4x - 3y + 2z = 16 \dots (2) \\ 2x - 2y - 3z = 5 \dots (3) \end{cases}$$

Primero: Eliminamos la variable "z" de las ecuaciones (1) y (2), multiplicando la ecuación (1) por 2 se tendrá:

$$\begin{cases} 2x + 2y - 2z = -2 \\ 4x - 3y + 2z = 16 \\ \hline 6x - y = 14 \dots (4) \end{cases}$$

Segundo: Eliminamos "z" de las ecuaciones (1) y (3), multiplicando la ecuación (1) por -3. Se tiene:

$$\begin{cases} -3x - 3y + 3z = -3 \\ 2x - 2y - 3z = 5 \\ \hline -x - 5y = 8 \dots (5) \end{cases}$$

Tercero: De (4) y (5) se tendrá:

$$\begin{cases} 6x - y = 14 \\ -x - 5y = 8 \end{cases} \Rightarrow \text{Resolviendo: } x = 2 \wedge y = -2$$

Finalmente:

Reemplazando los valores de x y y en (1), (2) ó (3) determinamos z

Realizando operaciones se obtiene $z = 1$

Sistemas de Ecuaciones: Método de Cramer

Toman la siguiente forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

Métodos de Solución

1. Regla de Cramer: (Teorema)

1.1. Determinación de la variable x

$$X = \frac{\Delta_x}{\Delta_s} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

1.2. Determinación de la variable y.

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta_s} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

1.3. Determinación de la variable z.

$$z = \frac{\Delta_z}{\Delta_s} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

Donde:

Δ_s = se forma con los coeficientes de las incógnitas.

Δ_x = Se forma cambiando en Δ los coeficientes de x por los términos independientes.

Δ_y = Se forma cambiando en Δ los coeficientes de y por los términos independientes.

Δ_z = Se forma cambiando en Δ los coeficientes de z por los términos independientes.

Sistemas Lineales de Ecuaciones con "n" Incógnitas

1. Representación.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \dots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

2. Regla de Cramer: Dado un sistema lineal de "n" ecuaciones con "n" incógnitas, el valor de una letra cualquiera es una fracción que tienen por denominador al determinante en la que la columna de los coeficientes de la letra se ha cambiado por la columna de términos independientes. El determinante de la matriz de los coeficientes de las incógnitas es distinto de cero. (Determinante del sistema).

$$\Delta_s = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \hat{a}_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

La solución viene dada por: $x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta_s}$; $i = 1, 2, 3, \dots, n$ Δ_i es la matriz que se obtiene a partir de la matriz Δ_s

cambiando los elementos de la columna i por los términos independientes. Para resolver un sistema de n ecuaciones con n incógnitas por la regla de Cramer es preciso calcular $n+1$ determinante de orden n .

3. Propiedades:

- 3.1. Tiene solución única si $\Delta_s \neq 0$
- 3.2. Tiene infinitas soluciones Si $\Delta_s = 0 \wedge \Delta_i = 0$; $i = 1, 2; \dots, n$
- 3.3. No tiene solución Si $\Delta_s = 0 \wedge \Delta_i \neq 0$; Para $i = 1, 2; \dots, n$

Teorema de ROUCHÉ-FRÖBENIUS

1. Enunciado:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \dots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right\} (S)$$

Consideremos las matrices A , de los coeficientes:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Y la matriz A^* ; la matriz ampliada con los términos independientes.

$$A^* = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

2. Teorema:

2.1. S es compatible $\Leftrightarrow \text{Rango}(A) = \text{Rango}(A^*)$

2.2. $\Leftrightarrow \text{Rango}(A) = \text{Rango}(A^*) \begin{cases} < n \Rightarrow S; \text{Compatible} - \text{Indeterminado} \\ = n \Rightarrow S; \text{Compatible} - \text{Determinado} \end{cases}$

Sistemas de Ecuaciones Homogéneas

1. Sistema lineal homogéneo: Son aquellos sistemas lineales donde cada ecuación tiene término independiente nulo.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \dots + a_{3n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

Siempre es compatible dado que al menos una solución es $x_1 = x_2 = x_3 = \dots = x_n = 0$; donde es trivial o impropia.

2. Solución trivial: Son las soluciones de la forma $\{(0;0;0; \dots; 0)\}$ un sistema lineal homogéneo siempre tiene una, solución trivial o impropia.

El estudio de los sistemas lineales, homogéneos siempre se centrará en investigar si existen otras soluciones a parte de la trivial. (Sistema homogéneo)

3. Analizando: (Sistema homogéneo)

3.1. $\Delta S \neq 0$; el sistema tiene única solución la trivial: $(0;0;0)$. Se deduce de Cramer

3.2. $\Delta S = 0$; El sistema tiene infinitas soluciones; es decir es; compatible indeterminado.

3. Teoremas: Sea el sistema.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \dots + a_{3n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

El sistema siempre tendrá solución, ya que siempre se cumplirá que: $r(A) = r(B)$

3.1. Si: $r(A) = \text{Al número de incógnitas}$, existirá una única solución que será la solución trivial.

$$x_1 = x_2 = x_3 = \dots = x_n = 0$$

3.2. Si: $r(A) < \text{Al número de incógnitas}$, existirá infinitas soluciones.

4. Teorema: Un sistema de ecuaciones lineales homogéneo tiene solución distinta de la trivial, si el rango de la matriz de coeficientes es menor que el número de incógnitas.

5. Corolario: Un sistema de ecuaciones lineales homogéneo con igual número de ecuaciones que de incógnitas tienen solución distinta de la trivial, si el determinante de la matriz de coeficientes es nulo.

Método de GAUSS para Resolver Sistemas de Ecuaciones Lineales

1. Definición: El método, consiste en realizar determinadas transformaciones elementales en el sistema de ecuaciones lineales, de modo que los sistemas equivalentes que se van obteniendo contengan menos incógnitas.

Como se verá a continuación, cuando el sistema de ecuaciones lineales está dado en su forma matricial el método se deduce a escalar la matriz ampliada del sistema.

Dada una matriz A, es recomendable realizar las operaciones siguientes:

1.1. Permutar dos filas de A.

1.2. Multiplicar todos los elementos de una fila de A. Por un número diferente de cero.

1.3. Sustituir una fila por el resultado, de sumarle a ella un múltiplo de cualquier otra fila.

Se les llama TRANSFORMACIONES ELEMENTALES por filas en A.

2. Método de Gauss. Sea el sistema.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = b_3 \end{cases}$$

Luego representamos el sistema en forma matricial.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \Rightarrow Ax = B$$

3. Definición: Sea el sistema.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

Denotaremos por (A/B) a la matriz ampliada del sistema definido por:

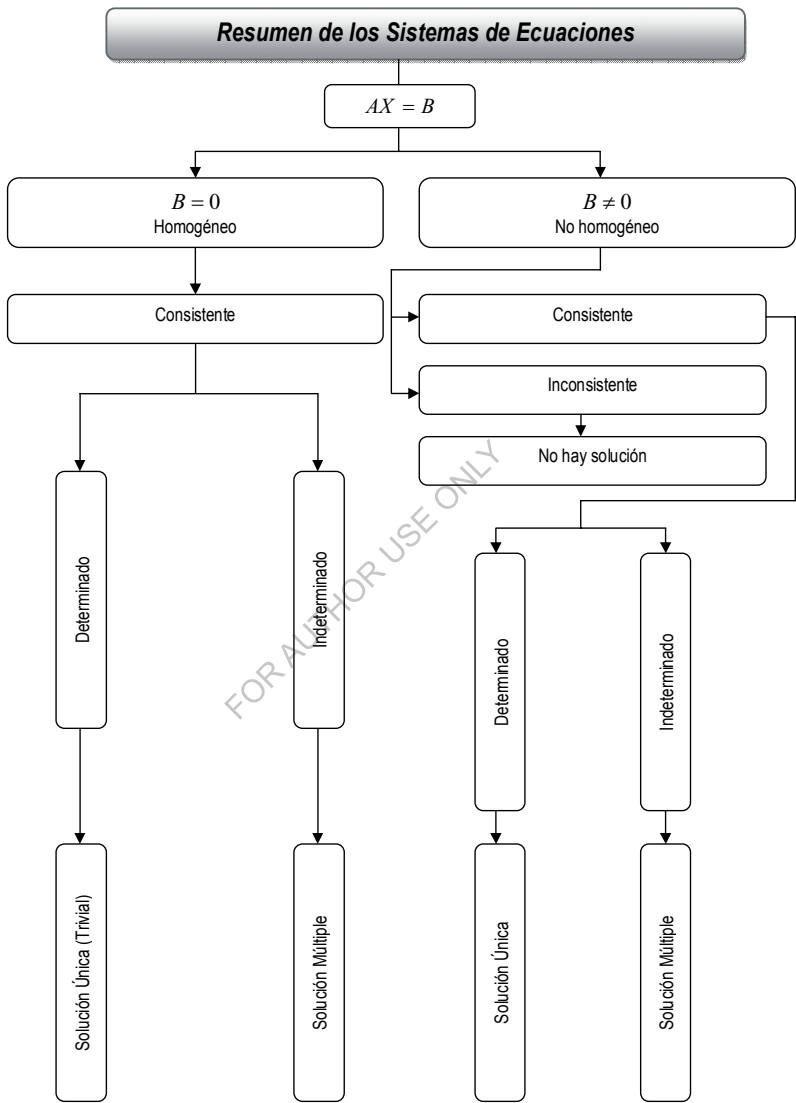
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \vdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \vdots & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \vdots & b_3 \end{bmatrix}$$

Al usar las operaciones elementales en las filas se busca transformar una matriz aumentada en una matriz de un sistema en forma triangular. La matriz resultante tendrá la siguiente forma para un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas.

$$\begin{bmatrix} a_{11}^* & a_{12}^* & a_{13}^* & \vdots & b_1^* \\ 0 & a_{22}^* & a_{23}^* & \vdots & b_2^* \\ 0 & 0 & a_{33}^* & \vdots & b_3^* \end{bmatrix}$$

Por tanto, se deduce que:

$$a_{33}^* x_3 = b_3^* \Rightarrow x_3 = \frac{b_3^*}{a_{33}^*}; \text{ También: } a_{22}^* x_2 + a_{23}^* x_3 = b_2^*; a_{11}^* x_1 + a_{12}^* x_2 + a_{13}^* x_3 = b_1^*$$



Sistemas de Ecuaciones Cuadráticas

1. Propiedades Particulares. Para el siguiente sistema de ecuaciones cuadráticas.

$$\begin{cases} a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0; a_1 \neq 0 \\ a_2x^2 + b_2x + c_2 = 0; a_2 \neq 0 \end{cases}$$

La condición que debe cumplirse para que:

1.1. Ambas ecuaciones tengan las mismas raíces:

Es decir que las ecuaciones sean equivalentes. Se debe cumplir la relación de proporcionalidad entre los coeficientes de sus respectivos términos semejantes, la cual es:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

1.2. Ambas ecuaciones admitan una raíz común (teorema de BEZOUT)

Siendo esta relación, LA CONDICIÓN DE COMPATIBILIDAD conocida con el nombre de BEZOUTIANA, para que dos ecuaciones cuadráticas de una incógnita, tengan una raíz común, cuyo valor se determina así:

$$\frac{\begin{bmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}} = \frac{a_1 \times c_2 - a_2 \times c_1}{a_1 \times b_2 - a_2 \times b_1}$$

Teoremas: sean las ecuaciones cuadráticas. $\begin{cases} ax^2 + bx + c = 0; a \neq 0 \\ mx^2 + nx + p = 0; m \neq 0 \end{cases}$

Son equivalentes entonces: $\frac{a}{m} = \frac{b}{n} = \frac{c}{p}$

Tienen una raíz común, entonces: $(c.m - a.p)^2 = (a.n - b.m)(b.p - c.n)$

1.3. Ecuaciones de segundo grado que tiene una raíz común. Las ecuaciones:

$$\begin{cases} ax^2 + bx + c = 0 \\ dx^2 + ex + f = 0 \end{cases}$$

Tienen una raíz común, se elimina " x^2 " y se obtiene la raíz común; es decir:

$$\begin{cases} a.dx^2 + b.dx + c.d = 0 \dots (I) \\ a.dx^2 + a.ex + a.f = 0 \dots (II) \end{cases} \quad \text{Restando (I) - (II)}$$

$$x(b.d - a.e) + (c.d - a.f) = 0 \Rightarrow x = \frac{a.f - c.d}{b.d - a.e}$$

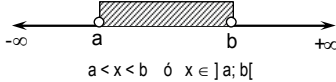
Intervalos

1. Intervalo.

Dado un conjunto ordenado "K" llamaremos intervalo a un subconjunto limitado entre dos extremos (superior, inferior), que pueden ser elementos del conjunto "K" o ideales $(+\infty \text{ ó } -\infty)$

2. Intervalos Acotados.

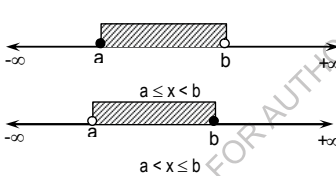
2.1. Intervalo Abierto: Es aquel campo de valores en el que no se incluyen los extremos.



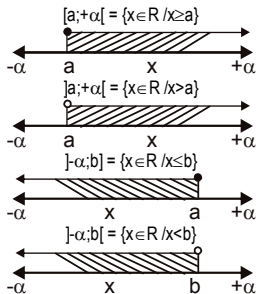
2.2. Intervalo Cerrado: Es aquel campo de valores en el que se le incluyen los extremos.



2.3. Intervalos Semicerrados o Semiabiertos:



3. Intervalos no Acotados.



4. Operaciones con Intervalos.

Siendo los intervalos subconjuntos de un conjunto ordenado, es posible realizar con ellos las operaciones definidas para los conjuntos, como son la intersección, unión, diferencia y complemento. Sean los intervalos P y M, se define y denotan:

4.1. Unión.

$$P \cup M = \{x \in R / x \in P \vee x \in M\}$$

4.2. Intersección.

$$P \cap M = \{x \in R / x \in P \wedge x \in M\}$$

4.3. Diferencia.

$$P - M = \{x \in R / x \in P \wedge x \notin M\}$$

4.4. Complemento.

$$P^c = P' = \{x \in R / x \notin P\}$$

Observación 1:

En el caso de interceptar más de una recta se puede dar.

$$\circ \cap \bullet = \circ$$

$$\circ \cap \circ = \circ$$

$$\bullet \cap \bullet = \bullet$$

Observación 2:

La notación ∞ , que se lee infinito no es un número real, sino un símbolo que se utiliza para indicar que es ilimitada por derecha $(+\infty)$, o por la izquierda $(-\infty)$

Observación 3:

$\vee$ = Unión

$\wedge$ = Intersección

Intervalos

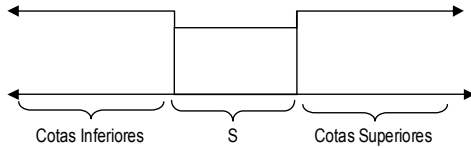
Tipos de Intervalos	Representación	Observación
Intervalo Cerrado	$[p; q] = \{x \in R; p \leq x \leq q\}$	Incluye los límites p y q
Intervalo Abierto	$\langle p, q \rangle = \{x \in R; p < x < q\}$	Excluye los límites p y q
Intervalo cerrado por la izquierda	$[p; q) = \{x \in R; p \leq x < q\}$	Incluye a p y excluye a q
Intervalo cerrado por la derecha	$(p; q] = \{x \in R; p < x \leq q\}$	Excluye a p e incluye a q
Intervalo semi-cerrado	$[p; \alpha) = \{x \in R; x \geq p\}$	Valores mayores o iguales a p
Intervalo semi-cerrado	$(-\alpha; q] = \{x \in R; x \leq q\}$	Valores menores o iguales a q
Intervalo semi-abierto	$\langle p; \alpha \rangle = \{x \in R; x > p\}$	Valores mayores a p
Intervalo semi-abierto	$\langle -\alpha; q \rangle = \{x \in R; x < q\}$	Valores menores a q

Observación:
Es fácil observar que el conjunto de los números reales, puede ser representado en forma de intervalo como:
 $R = \langle -\alpha; +\alpha \rangle$

Conjuntos Acotados

1. Cota Superior: un número real k es una cota superior de un subconjunto no vacío S de $\mathbb{R}$ si y sólo si: $x \leq k, \forall x \in S$

2. Cota inferior: un número real k es una cota inferior de S si y sólo si: $x \geq k, \forall x \in S$



3. Supremo: un número real c se llama supremo de un subconjunto no vacío S de $\mathbb{R}$, y se escribe $c = \sup S$ si:

3.1. c es cota superior de S ($x \leq c, \forall x \in S$)

3.2. c es la menor cota superior de S , es decir si: $\forall k \in \mathbb{R} / x \leq k, \forall x \in S$, entonces $k \geq c$
Por tanto, c no necesariamente pertenece a S .

4. Ínfimo: un número real d . Se llama ínfimo de un subconjunto no vacío S de $\mathbb{R}$, y se escribe $c = \inf S$ Si:

4.1. d es cota inferior de S ($x \geq d, \forall x \in S$)

4.2. d es la mayor de las cotas inferiores de S , es decir.

Si: $\forall k \in \mathbb{R} / x \geq k, \forall x \in S$, entonces $k \leq d$.

Por tanto, d no necesariamente pertenece a S .

5. Máximo:

Si c es supremo de S y $c \in S$, entonces c es máximo de S ($c = \max S$)

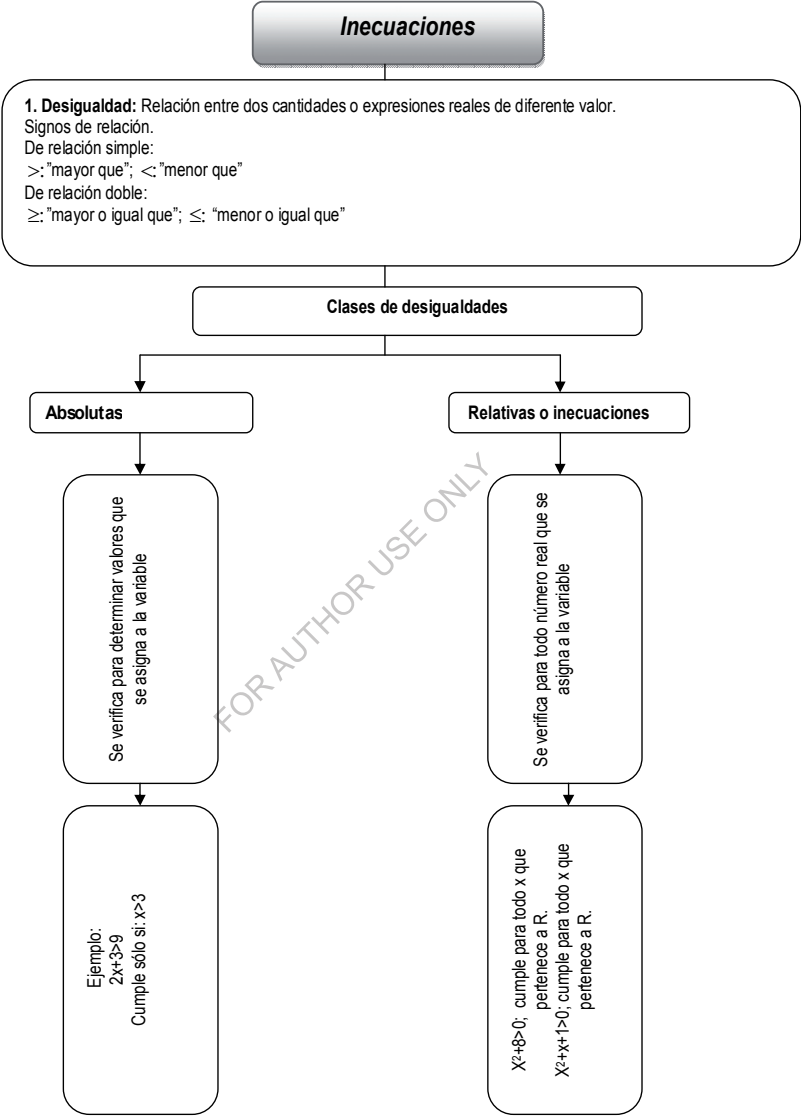
6. Mínimo

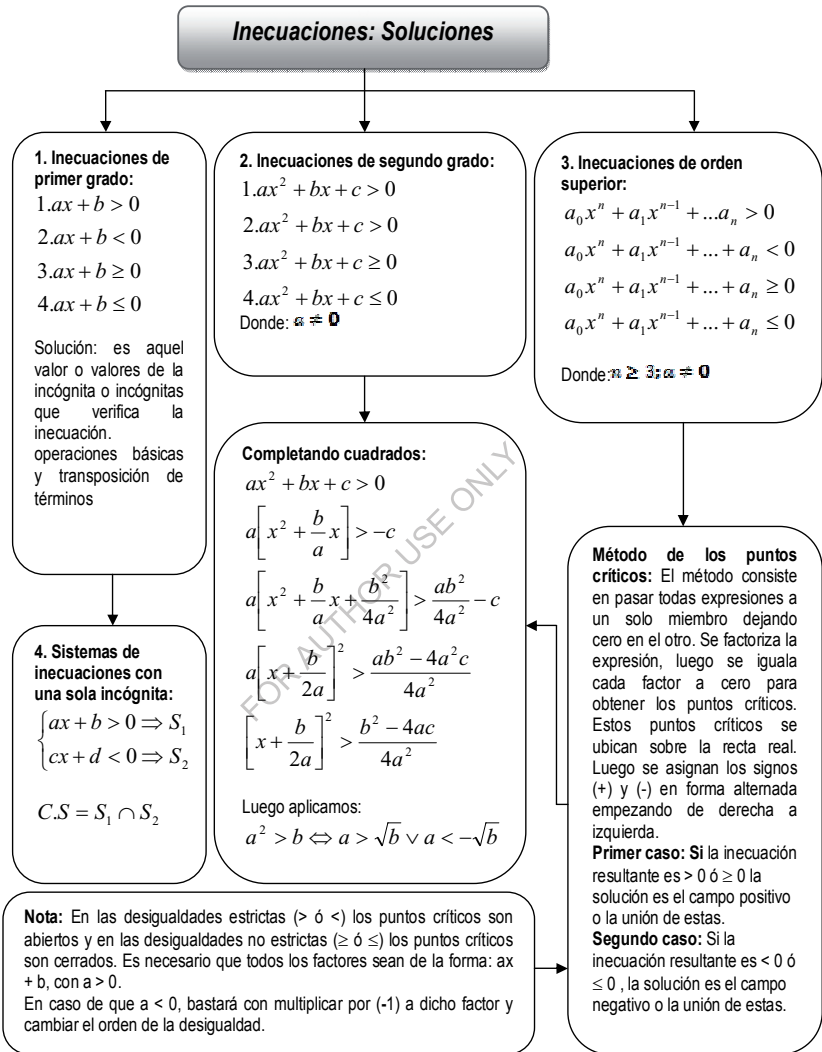
Si d es ínfimo de S y $d \in S$, entonces d es mínimo de S : ($d = \min S$). Ejemplo:

Dado el conjunto $S = [2, 5]$

El $\sup S = 5$, además $5 \in S$, entonces el $\max S = 5$

El $\inf S = 2$, pero $2 \notin S$, entonces S no tiene mínimo





Inecuaciones: Propiedades

1. Definiciones de: $>$; $<$; $\geq$; $\leq$

$\forall a, b \in \mathbb{R}$; se define:

1.1. a ; es positivo $\Leftrightarrow a > 0$

1.2. a ; es negativo $\Leftrightarrow a < 0$

1.3. Si $a > b \Leftrightarrow a - b$; es positivo.

1.4. Si $a < b \Leftrightarrow a - b$; es negativo.

1.5. Si $a \geq b \Leftrightarrow a > b \vee a = b$

1.6. Si $a \leq b \Leftrightarrow a < b \vee a = b$

1.7. Si $a < b < c \Leftrightarrow a < b \wedge b < c$

2. Axiomas de desigualdades:

Si $a, b, c \in \mathbb{R}$; Entonces se cumple que:

2.1. Si $a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c$

2.2. Si $a < b \wedge c \in \mathbb{R} \Rightarrow a + c < b + c$

2.3. Si $a < b \wedge c > 0 \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$; $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$

2.4. Si $a < b \wedge c < 0 \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c$; $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$

3. Inecuaciones Fraccionarias:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} > 0; \frac{P(x)}{Q(x)} < 0; \frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0; \frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0;$$

Resolución:

$$\underline{C.V.A.} : Q(x) \neq 0$$

Conjunto-Valores-Admisibles

Puede aplicarse el criterio de puntos críticos, siempre considerando en la ecuación polinomial;

$$a(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) > 0$$

1. Garantizar que el coeficiente principal $a > 0$; en caso contrario multiplicar por -1.

2. Hallamos los puntos críticos y los ubicamos ordenados en la recta numérica.

Observación:

$\geq$; $\leq$: Intervalo cerrado.

$>$; $<$: Intervalo abierto.

$\wedge$: Intersección: $(\cap)$

$\vee$: Unión: $(\cup)$

Inecuaciones: Propiedades Adicionales

1. Teoremas relativos a desigualdades:

$$1. Si : a \in R \Rightarrow a^{2n} \geq 0$$

$$2. Si : a > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} > 0$$

$$3. Si : a < 0 \Rightarrow \frac{1}{a} < 0$$

$$4. Si : a > b \wedge c > d \Rightarrow (a + c) > (b + d) \vee (a - c) \Rightarrow (b - d)$$

$$5. Siendo : a, b, c \wedge d \in R^+$$

$$Si : a > b \wedge c > d \Rightarrow a \cdot c > b \cdot d;$$

$$Si : a > b \wedge c < d \Rightarrow \frac{a}{c} > \frac{b}{d}$$

$$6. Siendo : a \wedge b; \text{ De igual signo.}$$

$$7. Si : a < b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b};$$

$$8. Si : a < b \Rightarrow -a > -b$$

$$9. \forall a \in R : a^2 \geq 0;$$

$$10. Si : a > 0 \Rightarrow a^{-1} > 0$$

$$11. Si : a \wedge b; \text{ tienen el mismo signo y si: } a < b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$$

$$12. Siendo : a \wedge b \in R^+; n \in Z^+$$

$$Si : a > b \Rightarrow a^{2n} > b^{2n};$$

$$Si : a > b \Rightarrow \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$$

$$13. Si : a^m > a^n \wedge a > 1 \Rightarrow m > n$$

$$14. Si : a^m > a^n \wedge 0 < a < 1 \Rightarrow m < n$$

$$15. Siendo : a; b \in R^-; n \in Z^+$$

$$Si : a > b \Rightarrow a^{2n} < b^{2n}$$

$$16. Siendo : a \wedge b \in R; n \in Z^+$$

$$Si : a > b \Rightarrow a^{2n+1} > b^{2n+1}$$

$$Si : a > b \Rightarrow \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$$

Inecuaciones: Método de los Puntos Críticos

1. Propiedades más usuales para resolver inecuaciones:

- 1.1. Si : $a \leq x \leq b \Leftrightarrow x \geq a \wedge x \leq b$
- 1.2. Si : $a \cdot b > 0 \Leftrightarrow (a > 0 \wedge b > 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0)$
- 1.3. Si : $a \cdot b < 0 \Leftrightarrow (a > 0 \wedge b < 0) \vee (a < 0 \wedge b > 0)$
- 1.4. Si : $a^2 < b \wedge b > 0 \Rightarrow -\sqrt{b} < a < \sqrt{b}$
- 1.5. Si : $a^2 > b \wedge b \geq 0 \Leftrightarrow a > \sqrt{b} < \vee a < -\sqrt{b}$

2. Método de los puntos críticos:

Sea el polinomio: $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0$

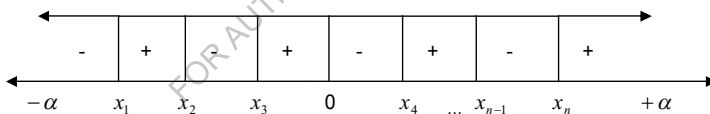
Donde: $a_0; a_1; a_2; \dots; a_n$, son coeficientes reales; $n \in \mathbb{Z}^+$ x_1

Esta ecuación es de grado "n" si y sólo si: $a_n \neq 0$ / a_n = coeficiente principal

Puede aplicarse el criterio de puntos críticos, siempre considerando en la ecuación polinomial;

$a(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) > 0; (>; <; \geq; \leq)$

1. Garantizar que el coeficiente principal $a > 0$; en caso contrario multiplicar por -1.
2. Hallamos los puntos críticos y los ubicamos ordenadamente de menor a mayor en la recta numérica (asumiendo que: $x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_{n-1} < x_n$)



Primer caso: Si la inecuación resultante es > 0 ó ≥ 0 la solución es el campo positivo o la unión de estas.

Segundo caso: Si la inecuación resultante es < 0 ó ≤ 0 , la solución es el campo negativo o la unión de estas.

3. Inecuaciones exponenciales:

Si : $b^{f(x)} < b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$, cuando : $b > 1$

Si : $b^{f(x)} < b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$, cuando : $b > 1$

Si : $b^{f(x)} < b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$, cuando : $0 < b < 1$

Si : $b^{f(x)} > b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$, cuando : $0 < b < 1$

Valor Absoluto

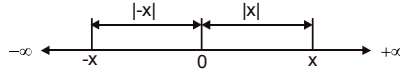
1. Definición.

El valor absoluto de un número real x es aquel número positivo denotado por $|x|$ y definido así:

$$|x| = \begin{cases} x; & x \geq 0 \\ -x; & x < 0 \end{cases}$$

2. Interpretación Geométrica.

El valor absoluto de " x ", representa la distancia que existe de x al cero.



3. Teoremas.

$\forall x \in \mathbb{R}$, se cumple :

$$|x| \geq 0$$

$$|x| = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$|-x| = x$$

$$|x| = |-x|$$

$$|x - y| = |y - x|$$

$$||x| - |y|| = |x - y|$$

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$$

$$\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}; y \neq 0$$

$$|x|^2 = x^2$$

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

$$\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{|x|}$$

$$|x^n| = |x|^n$$

$$|x + y| \leq |x| + |y|; \text{Desigualdad triangular}$$

$$-|a| \leq a \leq |a|$$

4. Ecuaciones con Valor Absoluto.

$$|x| = y \Leftrightarrow y \geq 0 \wedge [x = y \vee x = -y]$$

$$|x| = |y| \Leftrightarrow x = y \vee x = -y$$

5. Inecuaciones con Valor Absoluto.

1. Si: $y > 0$, entonces se cumple:

$$|x| \leq y \Rightarrow [-y \leq x \leq y]$$

$$|x| < y \Rightarrow [-y < x < y]$$

$$2. |x| \geq y \Rightarrow x \geq y \vee x \leq -y$$

$$3. |x| > y \Rightarrow x > y \vee x < -y$$

$$4. |x| \geq |y| \Leftrightarrow (x + y)(x - y) \geq 0$$

$$5. |x| > |y| \Leftrightarrow (x + y)(x - y) > 0$$

$$6. |x| \leq |y| \Leftrightarrow (x + y)(x - y) \leq 0$$

$$7. |x| < |y| \Leftrightarrow (x + y)(x - y) < 0$$

$$8. a < x < b \Rightarrow |x| < \max\{|a|, |b|\}$$

Progresión Aritmética (P.A.)

1. Progresión Aritmética.

Decimos que una sucesión de números están en progresión aritmética (P.A.) cuando cada uno de ellos es igual al anterior más una cantidad constante llamada razón (r) de la progresión:

Ejemplos:

$$\begin{aligned} &3; 7; 11; 15; \dots \\ &8; 2; -4; -10; \dots \\ &a, a + r, a + 2r, a + 3r, \dots \end{aligned}$$

Representación:

$$t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, \dots, t_{n-2}, t_{n-1}, t_n$$

P.A. de " n " términos

Donde:

$$t_n - t_{n-1} = \dots t_5 - t_4 = t_4 - t_3 = \dots$$

$$1 \Rightarrow t_1 \Rightarrow t_1$$

$$2 \Rightarrow t_2 \Rightarrow t_1 + r$$

$$3 \Rightarrow t_3 \Rightarrow t_1 + 2r$$

$$4 \Rightarrow t_4 \Rightarrow t_1 + 3r$$

$$5 \Rightarrow t_5 \Rightarrow t_1 + 4r$$

...

$$n \Rightarrow t_n \Rightarrow t_1 + (n-1)r$$

Por analogía.

$$t_n = t_1 + (n-1)r$$

Donde:

$$t_1 = \text{Primer término}; t_n = n\text{-ésimo término}$$

$$r = \text{Razón}; n = \text{número de términos}$$

2. Fórmulas.

¡...Importante...! Despejando obtenemos

$$\Rightarrow t_n = t_1 + (n-1)r$$

$$\Rightarrow t_1 = t_n - (n-1)r$$

$$\Rightarrow r = \frac{t_n - t_1}{n-1}; \Rightarrow n = \frac{t_n - t_1}{r} + 1$$

Observación:

Si: $r > 0$; La P.A. es creciente.

Si: $r < 0$; La P.A. es decreciente.

Progresión Aritmética: Propiedades

1. Suma de términos de una P.A.

$$S_n = \left[\frac{t_1 + t_n}{2} \right] \times n; \text{ como : } t_n = t_1 + (n-1)r$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{n}{2} [2t_1 + (n-1)r]; \text{ También}$$

$$S_n = \left[\frac{2t_n - (n-1)r}{2} \right] \times n$$

¡...Importante...!

$$\Rightarrow t_k = \frac{t_{k+1} + t_{k-1}}{2}$$

$$\Rightarrow t_n = t_k + (n-k)r$$

Donde: k es un lugar cualquiera

2. Interpolación de medios aritméticos

Es la operación que consiste en formar una P.A.: conociendo los extremos y el número de medios a interpolar, la razón de interpolación es:

$$\Rightarrow r = \frac{t_n - t_1}{n-1}$$

3. Término Central.

$$t_c = \frac{t_1 + t_n}{2}$$

4. Medios aritméticos o diferenciales

Son los términos de una P.A. comprendidos entre sus extremos

"m + 2" términos
a b

"m" medios aritméticos

Sabemos que:

$$\Rightarrow t_n = t_1 + (n-1)r$$

$$\Rightarrow b = a + [(m+2)-1]r$$

$$\Rightarrow r = \frac{b-a}{m+1}$$

Progresión Geométrica (P.G.)

1. Progresión geométrica

Decimos que una sucesión de números están en progresión geométrica (P.G.) cuando cada uno de ellos es igual al anterior multiplicado por una cantidad constante llamada razón (q) de la progresión.

Ejemplos:

$$a_n = 1; 2; 4; 8; 16; 32; 64; 128 \dots; x_n = -1; -3; -9; -27; -81; -243; -729$$

$$q_n = a, aq, aq^2, aq^3, \dots$$

Representación:

$$\underbrace{t_1; t_2}_{x, r}; t_3; t_4; t_5; \dots; t_{n-2}; t_{n-1}; t_n$$

P.G. De "n" términos

Donde:

$$r = \frac{t_n}{t_{n-1}} = \frac{t_{n-1}}{t_{n-2}} = \dots = \frac{t_5}{t_4} = \frac{t_4}{t_3} = \frac{t_3}{t_2} = \dots$$

$$1 \Rightarrow t_1 \Rightarrow t_1$$

$$2 \Rightarrow t_2 \Rightarrow t_1 \cdot r$$

$$3 \Rightarrow t_3 \Rightarrow t_1 \cdot r^2$$

$$4 \Rightarrow t_4 \Rightarrow t_1 \cdot r^3$$

$$5 \Rightarrow t_5 \Rightarrow t_1 \cdot r^4$$

...

$$n \Rightarrow t_n \Rightarrow t_1 \cdot r^{n-1}$$

Por analogía: $t_n = t_1 \cdot r^{n-1}$

Donde:

t_1 = Primer término; t_n = n-ésimo término

r = Razón; n = número de términos

2. Fórmulas.

¡...Importante...! Despejando obtenemos

$$t_n = t_1 \cdot r^{n-1} \Rightarrow t_1 = \frac{t_n}{r^{n-1}} = t_n \cdot r^{1-n}$$

$$t_n = t_1 \cdot r^{n-1} \Rightarrow r = \sqrt[n-1]{\frac{t_n}{t_1}}$$

$$n = \frac{\log t_n - \log t_1}{\log r} + 1$$

Progresión Geométrica: Propiedades

1. Suma de términos de una P.A.

$$S_n = \frac{t_1 - t_n \cdot r}{(1-r)}; \text{ pero } t_n = t_1 \cdot r^{n-1}$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{t_1 (r^n - 1)}{r - 1}$$

Para P.G. decrecientes ilimitadas (suma límite)

$$S_\alpha = \frac{t_1}{1-r}; (n \rightarrow \alpha \wedge |r| < 1); (0 < r < 1)$$

2. Interpolación de medios geométricos.

Se llaman medios geométricos a los términos de una P.G. comprendidos entre el primero y el último término, previamente debe hallarse r.

$$r = \sqrt[n-1]{\frac{t_n}{t_1}}$$

3. Propiedades.

$$t_1 t_n = t_2 t_{n-1} = t_3 t_{n-2} = \dots$$

Si k es un lugar cualquiera.

$$t_n = t_k \cdot r^{n-k}$$

$$t_k = \sqrt{t_{k+1} \times t_{k-1}}$$

Si n es impar, el término central es: $t_c = \sqrt{t_1 \times t_n}$

$$P = \sqrt[t_1 \times t_n]{t_1 \times t_n}; \forall n - \text{par}$$

$$P = [t_c]^n; \forall n - \text{impar}$$

4. Medios geométricos.

Son los términos de una P.G. comprendidos entre sus extremos

"m + 2" términos

a b

"m" medios geométricos

Sabemos que: $t_n = t_1 \cdot r^{n-1} \Rightarrow b = a \cdot r^{m+2-1}$

$$\therefore r = \sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}$$

Logaritmos

1. Definición:

Se llama logaritmo de un número en una base dada, positiva y distinta de la unidad, el exponente a que debe elevarse la base para obtener una potencia igual al número dado.

2. Notación:

Dado: $b^x = N$; potenciación

La operación inversa, o sea:

$\text{Log}_b N = x$; recibe el nombre de logaritmación. Ejem.

$$3^2 = 9 \Leftrightarrow \text{Log}_3 9 = 2$$

$$3^3 = 27 \Leftrightarrow \text{Log}_3 27 = 3$$

$$3^4 = 81 \Leftrightarrow \text{Log}_3 81 = 4$$

$$3^5 = 243 \Leftrightarrow \text{Log}_3 243 = 5$$

3. Logaritmo de un número real.

Definición:

El logaritmo de un número real y positivo real y positivo N, en la base b ($b > 0 \wedge b \neq 1$) es el exponente x al cual hay que elevar la base para obtener el número N, es decir:

$$\text{Log}_b N = x \Leftrightarrow b^x = N$$

Donde:

Log : Operador logarítmico

N: Número dado (real y positivo)

b: Base del logaritmo (positivo y $\neq 1$)

x: Logaritmo (cualquier número real)

4. Propiedades Elementales:

$$4.1. \text{Log}_b b^n = n$$

$$4.2. \text{Log}_b 1 = 0$$

$$4.3. b^{\text{Log}_b n} = n$$

$$4.4. \text{Log } A.B = \text{Log } A + \text{Log } B$$

$$4.5. \text{Log } \frac{A}{B} = \text{Log } A - \text{Log } B$$

$$4.6. \text{Log } A^n = n \text{Log } A$$

$$4.7. \text{Log}_{b^n} A = \frac{1}{n} \text{Log}_b A$$

Logaritmos: Propiedades

1. Propiedades Adicionales:

$$1.1. \log_b x = \frac{1}{\log_x b}$$

$$1.2. \log_b a = \frac{\log a}{\log b}$$

$$1.3. \log_a b \cdot \log_b a = 1$$

$$1.4. b^{\log_a x} = x^{\log_a b}$$

$$1.5. \log_b^n A = (\log_b A)^n; n \in \mathbb{Z}^+, n > 1$$

$$1.6. \log_b \sqrt[n]{A} = \frac{1}{n} \log_b A; n \geq 2; n \in \mathbb{Z}^+$$

$$1.7. \log_b A = \log_{b^n} A^n = \log_{\sqrt[n]{b}} \sqrt[n]{A}; n \in \mathbb{Z}^+$$

$$1.8. \log_{b^m} A^n = \frac{n}{m} \log_b A; m, n \in \mathbb{Z}^+$$

1.9. Inversa de base y número.

$$\log_a A = \log_{\frac{1}{a}} \frac{1}{A}$$

$$\log_a \frac{1}{A} = \log_{\frac{1}{a}} A$$

1.10. Exponente logarítmico.

$$A^{\log_a N} = N^{\log_a A}$$

1.11. Cambio de base: siendo $b > 0; b \neq 1$

$$\log_a A = \frac{\log_b A}{\log_b a}$$

1.12. División de logaritmos con base a:

$$\frac{\log_a N}{\log_a M} = \log_M N$$

1.13. Regla de la cadena.

$$\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c d \cdot \log_d e = \log_a e$$

Logaritmos Neperianos

1. Sistema de logaritmos neperianos.

Llamados también naturales o hiperbólicos cuya base es el número trascendente e ($e = 2,718281\dots$)

$$e = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{1}{x} \right]^x; e = \lim_{y \rightarrow 0} [1 + y]^{\frac{1}{y}}$$

$\log_e a = \text{Lna}$; Se lee logaritmo neperiano de a .

Conversión de neperiano a decimal: $\text{Lna} = 2,3026 \text{Log} a$

Conversión de decimal a neperiano: $\text{Log} a = 0,4343 \text{Lna}$

2. Propiedades: logaritmo neperiano ($b=e$).

$$2.1. \text{Lna} = n \Leftrightarrow e^n = a$$

$$2.2. \text{Lna}^p = p \text{Lna}$$

$$2.3. \text{Lna} + \text{Ln} b = \text{Ln} a \cdot b$$

$$2.4. \text{Lna} - \text{Ln} b = \text{Ln} \frac{a}{b}$$

$$2.5. e^{\text{Lna}} = a; \text{Ln} 1 = 0; \text{Lne} = 1; \text{Lne}^p = p$$

3. Propiedades de logaritmos decimales ($b = 10$).

$$3.1. \text{Log} a = n \Leftrightarrow 10^n = a; 3.2. \text{Log} a^p = p \text{Log} a; 3.3. \text{Log} a + \text{Log} b = \text{Log} a \cdot b$$

$$3.4. \text{Log} a - \text{Log} b = \text{Log} \frac{a}{b}; 3.5. 10^{\text{Log} a} = a; \text{Log} 1 = 0; \text{Log} 10 = 1$$

$$\frac{\text{Log} a}{\text{Log} b} = \text{Log}_b a; \text{Log} 10^n = n; \text{Log} a \cdot \text{Log} a \cdot 10 = 1$$

4. Inecuaciones logarítmicas: Siendo: $a > 1$

$$4.1. \text{Log}_a A > \text{Log}_a B \Rightarrow A > B$$

$$4.2. \text{Log}_a A < \text{Log}_a B \Rightarrow A < B$$

Siendo: $0 < a < 1$

$$4.3. \text{Log}_a A > \text{Log}_a B \Rightarrow A < B$$

$$4.4. \text{Log}_a A < \text{Log}_a B \Rightarrow A > B$$

Cologaritmo y Antilogaritmo

1. Cologaritmo.

Se define el cologaritmo de un número N positivo en una base dada " b " positiva y diferente de la unidad, como el logaritmo de la inversa de dicho número en esa misma base.

$$\text{Co log}_b N = \log_b \frac{1}{N} = -\log_b N$$

2. Propiedades:

$$2.1. \text{anti log}_b (\text{Log}_b X) = X$$

$$2.2. \text{anti log}_b (\text{Co log}_b X) = X^{-1}$$

$$2.3. \log_b (\text{anti log}_b X) = X$$

$$2.4. \text{Co log}_b (\text{anti log}_b X) = -X$$

Ejemplo:

$$\text{Co log}_2 \frac{1}{16} = \log_2 16 = 4$$

3. Antilogaritmos.

El antilogaritmo de un número real en una base dada es igual al número que resulta de elevar la base al número.

$$\text{anti log}_b X = \text{Exp}_b (X) = b^p; p \in \mathbb{R} \wedge b > 0 \wedge b \neq 1$$

Ejemplos:

Ejemplos:

$$\text{antilog}_2 3 = 2^3 = 8$$

$$\text{antilog}_2 5 = 2^5 = 32$$

Propiedades

$$1). \text{antilog}_b (\log_b N) = N; N > 0 \wedge b > 0 \wedge b \neq 1$$

$$2). \log_b (\text{antilog}_b x) = x; x \in \mathbb{R} \wedge b > 0 \wedge b \neq 1$$

Ejemplos:

$$\text{antilog}_5 (\log_5 \log_2 16) = \log_2 16 = 4$$

$$\log_3 (\text{antilog}_3 400) = 400$$

Series Aritméticas Notables: Adición

1. Serie de Números Naturales.

$$Z_n = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \dots + n = \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

2. Serie de Números Pares.

$$Z_n = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + \dots + 2n = \sum_{i=1}^n 2i = n(n+1)$$

3. Serie de Números Impares.

$$Z_n = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \dots + 2n - 1 = \sum_{i=1}^n (2i - 1) = n^2$$

También:

$$Z_n = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \dots + A = \left[\frac{A+1}{2} \right]^2$$

$$Z_n = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \dots + 2n + 1 = [n+1]^2$$

4. Serie de Cuadrados.

$$Z_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + \dots + n^2 = \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

4. Serie de Cubos.

$$Z_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

4. Serie de Números Impares al Cuadrado.

$$Z_n = 1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 9^2 + \dots + (2n-1)^2 = \sum_{i=1}^n (2i-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}$$

4. Serie de Números Impares al Cubo.

$$Z_n = 1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3 + 9^3 + \dots + (2n-1)^3 = \sum_{i=1}^n (2i-1)^3 = n^2(2n^2-1)$$

Series Aritméticas Notables: Producto

1. Serie de Productos Binarios.

$$Z_n = 1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + 4 \times 5 + 5 \times 6 + 6 \times 7 + \dots + n(n+1) = \sum_{i=1}^n n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

2. Serie de Productos Ternarios.

$$Z_n = 1 \times 2 \times 3 + 2 \times 3 \times 4 + \dots + n(n+1)(n+2) = \sum_{i=1}^n n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

3. Suma de Inversas de Productos Binarios.

$$Z_n = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

4. Suma de Números Pares al Cuadrado.

$$Z_n = 2^2 + 4^2 + 6^2 + 8^2 + \dots + (2n)^2 = \sum_{i=1}^n (2i)^2 = \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$$

5. Suma Para Múltiplos de un Número.

$$S = \frac{m \times n(n+1)}{2}$$

Donde:

m = Múltiplo que se desea.

n = Número de múltiplos deseados.

6. Suma de los Cubos de los "n" Primeros Números Pares.

$$Z_n = 2^3 + 4^3 + 6^3 + 8^3 + \dots + (2n)^3 = \sum_{i=1}^n (2i)^3 = 2n^2(n+1)^2$$

7. Suma de las Cuartas Potencias de los "n" Primeros Números Naturales.

$$Z_n = 1^4 + 2^4 + 3^4 + 4^4 + \dots + n^4 = \sum_{i=1}^n i^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$$

8. Suma de Potencias de Igual Base.

$$Z_n = b^1 + b^2 + b^3 + b^4 + b^5 + \dots + b^n \Rightarrow S = \frac{b^{n+1} - b}{b - 1}$$

Series de Taylor

1. Serie binómica o binomial.

$$f(x) = (1 \pm x)^\alpha = 1 \pm \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 \pm \binom{\alpha}{3}x^3 + \dots$$

n ; es un número cualquiera, positivo o negativo, entero o fraccionario.

2. Fórmula del coeficiente binómico:

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)\dots(\alpha-n+1)}{1.2.3.4\dots n}$$

Ejemplos:

$$1. \frac{1}{1 \pm x} = (1 \pm x)^{-1} = 1 \mp x + x^2 \mp x^3 + \dots; \forall |x| < 1$$

$$2. \sqrt{1 \pm x} = (1 \pm x)^{\frac{1}{2}} = 1 \pm \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 \pm \frac{1}{16}x^3 - \dots; \forall |x| < 1$$

$$3. \frac{1}{\sqrt{1 \pm x}} = (1 \pm x)^{-\frac{1}{2}} = 1 \mp \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 \mp \frac{5}{16}x^3 + \dots; \forall |x| < 1$$

3. Series de TAYLOR:

$$3.1. e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots; \forall x$$

$$3.2. a^x = 1 + \frac{x \ln a}{1!} + \frac{(x \ln a)^2}{2!} + \frac{(x \ln a)^3}{3!} + \dots; \forall x$$

$$3.3. \ln x = 2 \left[\frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{3} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^5 + \dots \right]; \forall x > 0$$

$$3.4. \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots; \forall -1 < x < 1$$

$$4.5. \ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$$

Referencias Bibliográficas

- Alarcón, J.; Bonilla, E., Nava, R.; Rojano, T.; Quintero, R. (2005). Libro para el Maestro. Matemática secundaria. México. D. F.
- Alcalde, T.; Burgueño, C. (2008). Álgebra. Departamento de Matemática y Estadística. Facultad de Ingeniería y Administración. Universidad de la Frontera. Chile.
- Alvin, C.; Rencher, A.; Bruce, S. (2008). Linear Models in Statistics. Department of Statistics Brigham Young University. Provo, Utah.
- Cid, E., Godino, J., Batanero, C. (2004). Matemáticas para Maestros. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.
- García, J. (2002). Un pequeño manual para la resolución de problemas. Priego de Córdoba. España.
- LEXUS. (2008). Álgebra Manual de Preparación pre universitaria. Lima. Perú.
- Nachbin, L. (1986). Álgebra Elemental. Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas. Rio de Janeiro. Brasil.
- Macnab & Cummine, (1986) The Role of Conceptual knowledge in Remediation of Procedural Errors.
- Tsipkin (1985). Matemáticas para la enseñanza media. Editorial MIR Moscú.
- Kisbye, P.; Miatello, R. (2004). Álgebra I. Matemática discreta I. Facultad de Matemática, Astronomía y Física. Universidad Nacional de Córdoba.

FOR AUTHOR USE ONLY

FOR AUTHOR USE ONLY