



UNIVERSIDAD
DE PIURA

REPOSITORIO INSTITUCIONAL
PIRHUA

MODELACIÓN Y CONTROL DE UN SISTEMA DE CUATRO TANQUES ACOPLADOS

Peter Saúl Gutarra Castillo

Piura, marzo de 2016

FACULTAD DE INGENIERÍA

Máster en Ingeniería Mecánica Eléctrica con mención en Automática y
Optimización



Esta obra está bajo una [licencia](#)
[Creative Commons Atribución-](#)
[NoComercial-SinDerivadas 2.5 Perú](#)
Repositorio institucional PIRHUA – Universidad de Piura

UNIVERSIDAD DE PIURA
FACULTAD DE INGENIERÍA



“Modelación y control de un sistema de cuatro tanques acoplados”

Tesis para optar el Grado de Máster en
Ingeniería Mecánica– Eléctrico con mención en Automática y Optimización

Peter Saúl Gutarra Castillo

Asesor: Dr. Ing. Edilberto Vásquez Díaz

Piura, Marzo 2016

A Dios.

A mis padres Violeta Castillo y Saúl Gutarra, por todo su amor y apoyo para cumplir esta meta y al Consejo Nacional de Ciencia, Tecnología e Innovación Tecnológica (CONCYTEC) por la oportunidad brindada para pertenecer en el programa de maestría y realizar la investigación de mi tesis.

Prólogo

En la actualidad existen muchas industrias, como por ejemplo, las procesadoras de alimentos, las industrias metalúrgicas, plantas mezcladoras de concreto, plantas de tratamiento de aguas residuales, que presentan procesos donde existe regulación de nivel [1], también para la fabricación de papel, es necesario el controlar el nivel de sustancias [2] para obtener productos a la calidad deseada.

De igual manera en las industrias petroquímicas como en la destilación del petróleo se requiere una optimización de la energía consumida, ya que se trabaja con grandes cantidades de materia, además también es importante la calidad del producto. En proyectos de grandes dimensiones como el del Lago Silveretta (Austria) es donde se aprecia mejor la intervención del control de nivel [3], también existen aplicaciones recientes en sistemas de suministro de energía híbrida para edificios [4], y en la red de distribución de agua potable [5] para optimizar el consumo de energía.

Los procesos de control de nivel pueden presentar diversas configuraciones, desde los casos sencillos (Sistemas SISO) en el que se analiza un solo tanque [6], sistema de tanques en serie [7], y sistemas de tanques acoplados (Sistemas MIMO) con notable interacción [8], donde el control adquiere mayor grado de dificultad, ya que son sistemas no lineales y además multivariantes, es decir, una entrada afecta a más de una salida y recíprocamente una salida es afectada por varias entradas, es por ello, que los controladores multivariantes se encargan de reducir estas interacciones que se presentan en los procesos, pudiendo controlar a lo más tantas variables de salida como el número de variables de entrada que existan.

Tradicionalmente para el control de los procesos antes mencionados se emplea el controlador PID, usado por más de seis décadas debido a que posee una simple estructura [9]. Por ello, existen líneas de investigación que buscan el perfeccionamiento de los procesos y así se consiguen nuevos algoritmos de control avanzado, en ello existen estudios de control predictivo y control no lineal [10] que permitan obtener mejores desempeños.

Para evidenciar que el control predictivo tiene mejor performance que el PID, es necesario probar estos métodos de control en una planta y analizar los resultados, es por ello que el trabajo de esta tesis se aboca a la experimentación de diferentes algoritmos de control en una planta piloto multivariable, para poder sacar conclusiones al respecto.

Expreso mi agradecimiento a Dios por su compañía en mi vida, a mis padres, Saúl y Violeta, por sus consejos y aliento para lograr un desarrollo personal y profesional, a mis hermanos Brayán y Violetita por su apoyo en los momentos difíciles.

Al Dr. Ing. William Ipanaqué y al Dr. Ing. Edilberto Vásquez Díaz, por sus exigencias y orientación durante la realización de la tesis, agradeciéndoles por su apoyo incondicional en mi investigación. También a la Universidad de Piura, por la formación académica y personal.

Finalmente a mis amigos José Carlos Oliden, Gustavo Vásquez, Martín Capcha y Luighi De Francesch por sus explicaciones y colaboración.

Resumen

El Laboratorio de Sistemas Automáticos de Control de la Universidad de Piura tiene como uno de sus objetivos comparar diferentes metodologías de control y analizar el desempeño de cada una de ellas. Con esta finalidad se construye un módulo de cuatro tanques acoplados que representa un proceso multivariable.

Se implementa la instrumentación y los equipos electrónicos de adquisición de datos y comando PLC Click y la comunicación de éste con la PC mediante protocolo Modbus. También se seleccionaron actuadores (electrobombas) y transmisores de presión, que permitan captar las señales a la salida del proceso.

Se realizó una modelación matemática del sistema, basada en leyes físicas que rigen su comportamiento, donde se comprueba que se trata de un sistema no lineal, luego se linealizó el modelo entorno a un punto de operación para así poder implementar un sistema de control lineal alrededor de ese punto. Este modelo linealizado tuvo que ser validado con pruebas experimentales en el módulo (modelo obtenido realizando una identificación en la planta), lo cual se logró con una buena aproximación ajustando los parámetros físicos considerados en el modelo.

Los algoritmos de control fueron realizados en Matlab (PI y MPC con retroalimentación de estados) cada uno de ellos con su propia complejidad, además se incluyeron restricciones blandas y fuertes para tener un adecuado comportamiento de los actuadores y mantener la salida dentro de unos márgenes de operación. Así, se simuló cada controlador y se obtuvieron resultados esperados. Luego se realizaron pruebas experimentales a lazo cerrado con cada uno de los algoritmos de control y se obtuvieron resultados semejantes a las simulaciones, donde se evidencia que los algoritmos de control predictivo presentan un mejor rendimiento que las técnicas de control clásico.

Finalmente se desarrolló una aplicación mediante una plataforma GUI que permite seleccionar el algoritmo de control deseado, sintonizarlo y luego poder observar el comportamiento del nivel mediante una gráfica de nivel versus tiempo y también una interface gráfica del nivel de los tanques en el módulo, todo en tiempo real.

Índice

Introducción.....	1
Capítulo 1	3
1 Aspectos Generales.....	3
1.1 Sistemas de control multivariable.....	3
1.2 Sistemas de control de nivel	4
1.3 Antecedentes	5
1.4 Módulo de tanques acoplados de la Universidad de Piura	5
1.5 Intercambio de datos a nivel digital	9
1.5.1 Comunicación entre Matlab y PLC Click Koyo.....	9
1.5.2 Comunicación entre PLC Click Koyo y Módulo de control	10
1.6 Objetivos	11
Capítulo 2	13
2 Modelación Matemática del sistema	13
2.1 Marco teórico	13
2.1.1 Ecuación de Bernoulli	13
2.1.2 Ecuación de continuidad.....	14
2.1.3 Ley de Torricelli	15
2.2 Descripción del modelo matemático.....	17
2.2.1 Parámetros del Sistema.....	17
2.2.2 Circuito recorrido por el fluido.....	18
2.2.3 Modelo matemático	19
2.2.4 Simulación del modelo matemático	20
2.2.4.1 Simulación del Modelo Matemático N°1	23
2.2.4.2 Simulación Modelo Matemático N°2.....	25
Capítulo 3	27

3	Linealización y validación del modelo matemático	27
3.1	Descripción de la serie de Taylor	28
3.2	Ecuaciones Linealizadas	28
3.2.1	Representación del modelo lineal en espacio de estados	30
3.2.2	Simulación del modelo lineal	32
3.2.2.1	Simulación Modelo Lineal N°1	32
3.2.2.2	Simulación Modelo Lineal N°2	34
3.3	Identificación de procesos	36
3.3.1	Metodología de la Identificación.....	36
3.3.2	Modelos dinámicos	38
3.3.3	Algoritmo de identificación a espacio de estados (N4SID)	39
3.3.4	Identificación del Módulo de tanques acoplados	40
3.4	Verificación y ajuste del modelo lineal	44
Capítulo 4	47
4	Conceptos y estrategias de control multivariable.....	47
4.1	Observabilidad y Controlabilidad del sistema.....	47
4.1.1	Controlabilidad.....	48
4.1.2	Observabilidad	48
4.2	Control PID.....	49
4.2.1	Medidas de interacción.....	50
4.2.1.1	Numero de Condición	50
4.2.1.2	Matriz de Ganancias Relativas.....	51
4.2.1.3	Índice de Niederlinski	52
4.2.2	Sintonización por asignación de polos	52
4.2.3	Configuración Anti-Windup	53
4.2.3.1	Seguimiento integral	55
4.3	Control Predictivo Basado en Modelos	55
4.3.1	Control MPC con espacio de estados	56
4.3.1.1	Sistema Incrementado	57
4.3.1.2	Estimación de estados	59
4.3.2	Restricciones	60
4.3.2.1	Restricciones en la amplitud de control	60
4.3.2.2	Restricciones en la amplitud de tasa de cambio.....	61
4.3.2.3	Restricciones en la variable de salida	62
Capítulo 5	65
5	Simulación e Implementación de los algoritmos de control sobre el sistema.....	65
5.1	Experimento de control N°1	65

5.1.1	Diseño del controlador PI N°1	66
5.1.1.1	Análisis de interacción	67
5.1.1.2	Sintonización de los controladores PIs.....	68
5.1.1.3	Simulación del control PI N°1	69
5.1.2	Diseño del controlador MPC N°1.....	70
5.1.2.1	Sistema incrementado	72
5.1.2.2	Estimación de estados	73
5.1.2.3	Restricciones	73
5.1.2.4	Simulación del controlador MPC con espacio de estados N°1	74
5.2	Experimento de control N°2	75
5.2.1	Diseño del controlador PI.....	76
5.2.1.1	Análisis de interacción	76
5.2.1.2	Sintonización de los PIs	78
5.2.1.3	Implementación del control PI	79
5.2.2	Diseño del controlador MPC	80
5.2.2.1	Sistema incrementado	81
5.2.2.2	Estimación de estados	82
5.2.2.3	Restricciones	83
5.2.2.4	Implementación del MPC con espacio de estados N°2.....	83
	Conclusiones.....	87
	Bibliografía.....	89
	Anexos.....	91

Introducción

El desarrollo de nuevos estándares de calidad y el uso eficiente de la energía en los procesos industriales, implica una rápida adaptación y ello se logra con competitividad, investigación, e innovación. Es por ello que las industrias buscan obtener el máximo beneficio de sus procesos al menor costo de inversión. Así, se buscan implementar sistemas de control que no afecten de manera brusca la dinámica del proceso, que la variable controlada tenga un comportamiento aceptable y que los costos de operación sean los mínimos. Para ello por medio del Laboratorio de Sistemas Automáticos de Control de la Universidad de Piura se construye el módulo de cuatro tanques acoplados que representa un proceso de nivel multivariable. El tema de tesis que tiene por objetivo implementar técnicas de control para analizar el desempeño de cada una de ellas. La tesis se ha dividido en cinco capítulos, los cuales se resumen a continuación.

En el primer capítulo, se da una visión global de los sistemas multivariables. También se explican los antecedentes que permitieron tener una visión más especializada del tema. Por último se enuncian los objetivos de la tesis.

En el segundo capítulo se hace un análisis físico para determinar las leyes matemáticas que gobiernan el comportamiento del sistema y así poder obtener un modelo. Estos dos primeros capítulos son importantes para situar al lector dentro del contexto de la tesis.

El tercer capítulo abarca la linealización del modelo matemático y la representación de ésta en espacio de estados y matriz de transferencia. Luego el módulo es sometido a pruebas a lazo abierto para la validación del modelo lineal.

El cuarto capítulo abarca el aspecto teórico y explica a detalle las medidas de interacción que existen en un sistema multivariable. También se detallan los algoritmos de cada estrategia de control, se muestran los diagramas de flujo y la metodología llevada a cabo.

El quinto capítulo al igual que el anterior son la parte práctica del proyecto. A lo largo de este último capítulo se desarrolla una interfaz gráfica en Matlab para que el usuario pueda monitorear el proceso. Finalmente queda indicar que los dos últimos capítulos son teórico-prácticos y sus aportes son muy importantes, pues permite consolidar los objetivos de la tesis.

Capítulo 1

Aspectos Generales

1.1 Sistemas de control multivariable

En muchos de los procesos industriales el objetivo consiste en mantener una variable en su *set-point* o valor de referencia, para lo cual los reguladores proporcionales, integrales y derivativos solucionan bien la mayoría de los problemas de control monovariable (caudal, presión, nivel, temperatura, concentración,...).

Sin embargo, la mayoría de los procesos industriales son multivariables en los que una entrada afecta a más de una salida, y recíprocamente una salida es afectada por más de una entrada, ellos necesitan de una configuración más compleja, que permita desarrollar un control más eficaz.

El control multivariable constituye un tópico de avanzada en el campo del control de procesos. Inicialmente fue desarrollado para resolver problemas específicos de control en refinerías, la figura 1 muestra un proceso multivariable, con dinámicas acopladas y complejas.



Figura 1. Columna de destilación
rectificadora

Fuente: [11]

La tecnología de control multivariable se utiliza hoy en día en plantas químicas, sector alimentario, automotriz, metalurgia, industria papelera y otros entornos

industriales. Comercialmente, es una tecnología consolidada y prácticamente todos los fabricantes del sector ofertan alguna línea de productos.

A pesar de que las técnicas usadas para el control multivariable resuelven generalmente el problema de diseño del controlador con éxito, su inconveniente consiste principalmente en que el conjunto de valores que puede tomar el proceso necesita controladores de orden superior. Por otra parte, los sistemas que poseen retardos significativos no hacen posible un manejo eficiente con tales procedimientos, para resolver ello se requiere de un modelo de estructura particular para saber los valores finales de las salidas, además de que no se garantiza la estabilidad del sistema a lazo cerrado.

1.2 Sistemas de control de nivel

Un sistema de control de nivel es una estructura de instrumentación con parte lógica sobre una construcción hidráulica cuyo objetivo es garantizar el nivel o flujo de líquido en un rango de operación preestablecido. Existen algunas diferencias en la formulación de los distintos tipos de los controles de nivel, según se trate de: embalses, canales, plantas de tratamiento o tanques de almacenamiento [12].

En la presente tesis se estudiará el control de nivel para tanques de almacenamiento, donde el control tiene la función de mantener el nivel de agua a la altura deseada, garantizar el bienestar de las estructuras hidráulicas y de evitar el desperdicio de líquido. Para el control de nivel hace falta sensores de nivel o sensores de presión que mediante relación matemática puede hallarse el nivel, y para manipular el flujo del agua puede realizarse por válvulas o variando las revoluciones de las bombas que proporcionan el agua, de esta manera se elabora un sistema sofisticado, así el sensor actúa directamente, para aumentar o disminuir la entrada de agua al tanque.

Así muchos procesos industriales en la actualidad, requieren que un determinado fluido sea bombeado de un lugar a otro; muy en lo general de un tanque a otro. Y con mucha frecuencia la cercanía de estos tanques ocasiona que interactúen entre sí, dificultando así su regulación y su control de nivel.

Algunos tipos de industria donde el control de nivel y flujo son importantes son:

- Industrias de petroquímica.
- Industrias de fabricación de papel.
- Industrias de tratamientos de agua, etc.
- Industrias lácteas

Por ejemplo, para la fabricación de helado en las grandes industrias se introducen los ingredientes almacenados en depósitos separados hacia un depósito donde se controla la cantidad adecuada que entra este depósito, con la finalidad de obtener una mezcla homogénea. Estos ingredientes, tales como: leche, azúcar, agua, entre otros, son mezclados en ciertas condiciones óptimas de operación, para cumplir con ciertos estándares de calidad para su exportación y consumo.

En la figura 2 podemos apreciar el proceso de control de nivel y como se mezclan los ingredientes y se recircula para una mezcla de mejor calidad, que es lo que se busca obtener. Una vez obtenida la mezcla de calidad se lleva a otro depósito donde se almacena en un tanque para ser distribuida.

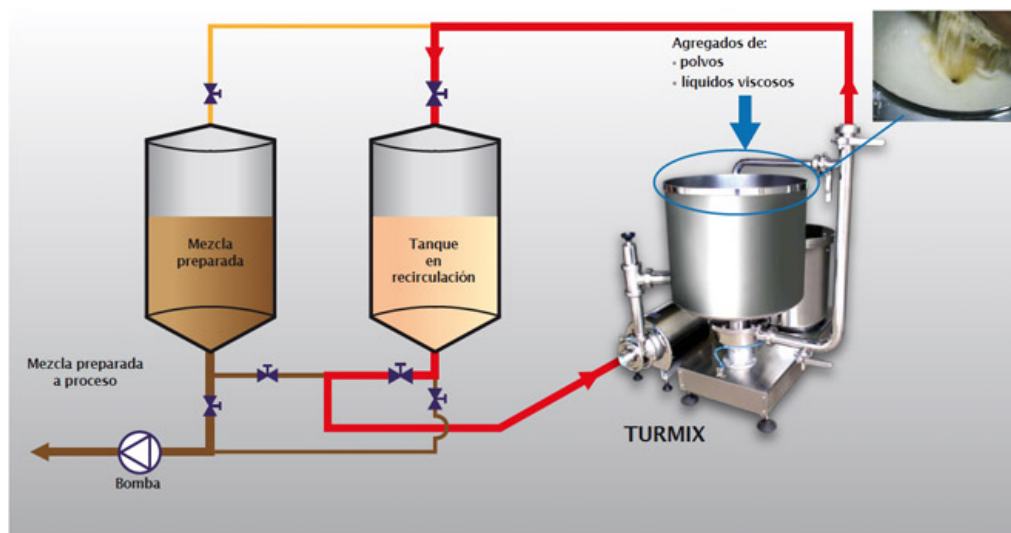


Figura 2. Control de nivel en la industria láctea

Fuente: Internet

1.3 Antecedentes

Actualmente en los procesos industriales es frecuente encontrar sistemas en los cuales es de mucha importancia controlar el nivel de dos o más tanques, cuyo comportamiento dinámico depende del caudal resultante de otros tanques, ante esto la estrategia de control debe considerar que cada parámetro puede mostrar una dependencia fuerte de otros.

En [13] se ha realizado la implementación de un control PID desacoplado para controlar el nivel de dos tanques de un sistema de 6 tanques, tomando en cuenta los disturbios en los caudales a la entrada y salida, mostrando resultados favorables. En la referencia [14] se puede observar la comparación de los controladores PID, IMC y lógica difusa, donde se puede ver la mejora de estos dos últimos sobre el primero, en el *overshoot* y tiempo de establecimiento, en este estudio se ha obtenido el modelo a través de la identificación. La comparación del control predictivo distribuido multi-paramétrico y el control PID desacoplado se muestra en [15], donde se observa el rechazo a los disturbios presentados, además se considera restricciones. Para un sistema de tres tanques híbrido se ha empleado un control predictivo con buenos resultados en [16]. En [17] y [18], también se ha trabajado la modelación matemática no lineal de sistemas híbridos de tanques conectados, con estrategia de control predictivo para el control de nivel de uno y dos tanques.

1.4 Módulo de tanques acoplados de la Universidad de Piura

Este módulo ha sido construido por la Universidad de Piura con los diseños del laboratorio de Sistemas Automáticos de Control, su propósito es permitir ilustrar y estudiar los conceptos de control multivariable.

La planta piloto de control de nivel de cuatro tanques, puede ser vista como un prototipo de diversas aplicaciones industriales, tales como en la industria química, petroquímica, fabricación de papel, entre otras. Los materiales y equipos se seleccionaron convenientemente para su adecuado rendimiento y vida útil. En la figura 3 se muestra el módulo ubicado en el Laboratorio de Sistemas Automáticos de Control.



Figura 3. Módulo de cuatro tanques acoplados
Fuente: Propia

El módulo cuenta con cuatro tanques acoplados con un sensor en cada tanque para poder medir la presión producida por el nivel de agua, dos electrobombas de corriente continua con velocidad variable, 11 válvulas y un tanque reservorio.

Las electrobombas son centrífugas con una potencia de 26 W y una tensión nominal de 24 V, fueron acopladas al circuito mediante bridas, como se muestra en la figura 4.



Figura 4. Electrobomba montada en el modulo

Fuente: Propia

Se ha considerado válvulas manuales que son las válvulas rojas, pero también se ha utilizado unas válvulas pequeñas de manivela azul para representar a las perturbaciones cuando se aplique el control. Estas válvulas se pueden apreciar en la figura 5.

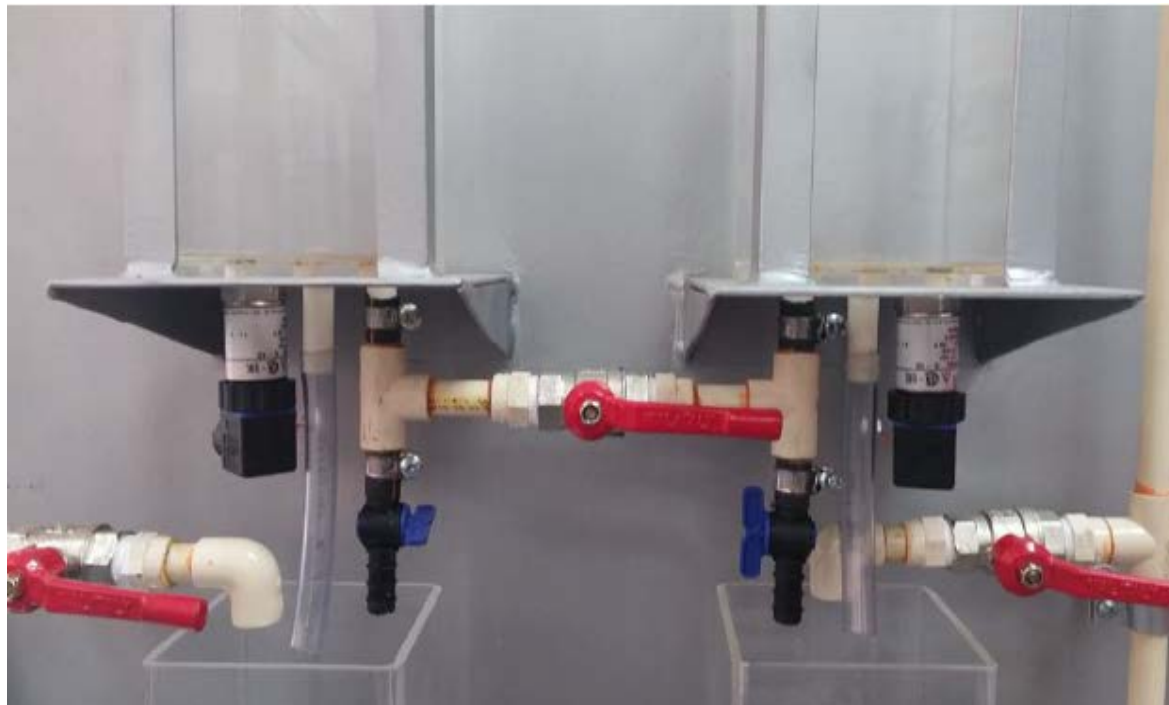


Figura 5. Válvulas utilizadas en el modulo

Fuente: Propia

Los sensores utilizados, son de presión diferencial, ubicados en la parte inferior de cada tanque, al costado de las descargas y las válvulas de perturbación.



Figura 6. Ubicación de los sensores de presión diferencial
Fuente: Propia

Para manipular cada electrobomba se ha implementado un driver que permita variarle el voltaje. El driver es alimentado por una tensión constante, y la tensión de salida del driver es controlada por una señal PWM brindada por un Arduino Nano. La figura 7 muestra el driver con sus respectivas conexiones.

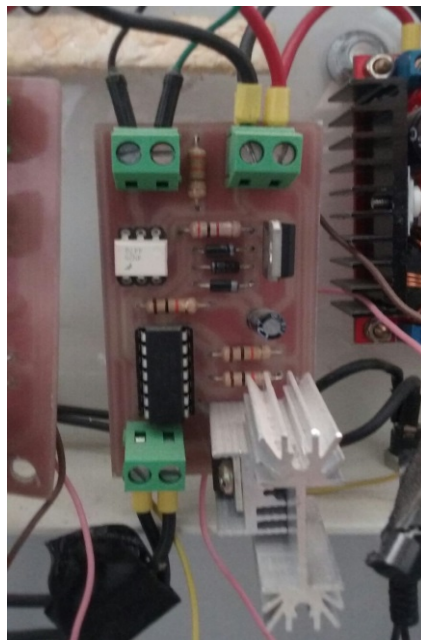


Figura 7. Driver para manipulación
de las electrobombas
Fuente: Propia

Luego se realizaron pruebas del sistema a lazo abierto, que sirvieron de mucho para corregir detalles, ya que inicialmente hubo algunas fugas de agua.

1.5 Intercambio de datos a nivel digital

A nivel digital la incorporación de equipos en el nivel más bajo, es decir, el de campo, conlleva a varias situaciones. La más importante es el aumento de datos, el cual requiere un orden para su almacenamiento, un estándar de tamaño de memoria, un protocolo de transferencia, un modo de visualización y en otras situaciones mucho más delicadas requieren también ser procesadas dentro un tiempo crítico [19]. En la figura 8 se muestra el esquema para la interfaz que se utiliza para transferencia de datos entre el ordenador y el módulo.

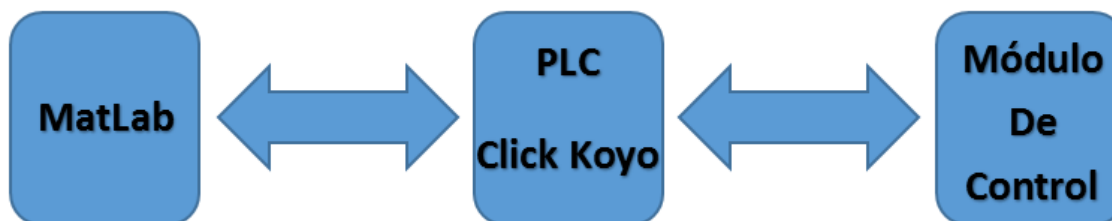


Figura 8. Diagrama de comunicación
Fuente: Elaboración propia

1.5.1 Comunicación entre Matlab y PLC Click Koyo

La forma de intercambiar datos a través del software Matlab y el PLC Click Koyo es mediante el protocolo Modbus RTU. Este protocolo tiene una estructura de comunicación predefinida y estandarizada, que los elementos de control reconocen y pueden usarla para ejecutar las órdenes que reciben por parte del equipo maestro. La estructura de mensajería fue desarrollada por la compañía MODICON (Modular Digital Controller) y nació con el fin de conectar PLCs con sus herramientas de programación.

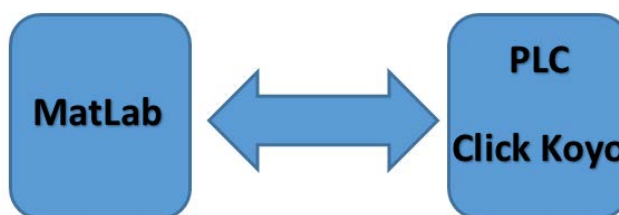


Figura 9. Diagrama de comunicación entre Matlab y el PLC
Fuente: Elaboración propia

Es importante distinguir la diferencia entre el protocolo de comunicación y la capa física de la red. Modbus, por ejemplo se puede implementar bajo una capa física en estándares RS-232, RS-485 o Ethernet. Este protocolo reúne una secuencia de pasos para que la trama digital a intercambiar, se valide correctamente entre ambas partes y se convierta a finalmente en una instrucción para los equipo de control [20].

En este modelo experimental de tanques acoplados la señal de los sensores de presión es llevada al PLC para su almacenamiento en memorias tipo coma flotante, específicamente de la DF1 a DF4 y son copiadas a las direcciones 00 00 a 00 03 de la base de datos hexadecimales. El vector Modbus para solicitar el valor de estos espacios de memoria es:

message = [1 3 0 0 0 4 68 9]

El primer valor '1' representa el número de esclavo a quien se solicita la información, el segundo valor '3' es el código de función que en este caso es leer varios registros de memoria, los siguientes dos números '0 y 0' es la dirección de la primera memoria a leer, luego continua la cantidad de direcciones a leer y se reservan dos bytes por memoria, como se leen 4 sensores entonces corresponde el '0 y 4', finalmente vienen las componentes del CRC que en este caso son '68 y 9' los cuales serán constantes en cada bucle del algoritmo de control pues son las mismas direcciones que se leen. El vector respuesta retorna los valores de los niveles de los tanques en un escalamiento de 0 a 1 m.c.a con dos decimales de precisión.

Para los comandos de envío, el vector Modbus cambia debido al valor que toma la señal de control durante el procesamiento del algoritmo. La señal de comando es el valor tensión que debe llegar a las bombas para cumplir con el cálculo de control, este valor tiene el rango de 0 a 24 V con un decimal de precisión.

$$\text{message} = [1 \ 16 \ 0 \ 6 \ 0 \ 2 \ 4 \ 0 \ u(1, k) \ 0 \ u(2, k)]$$

El primer valor '1' al igual que el caso anterior es para el número de esclavo, el valor de '16' es el código de función que en este caso es escribir en varios registros dado que cada bomba está anclada a una memoria independiente. El valor de '0 y 6' que sigue representa la primera dirección de memoria sobre la cual se va escribir. Posteriormente viene la cantidad de bytes que demanda esta acción sobre el PLC, como son dos memorias y cada una ocupa dos bytes entonces el valor que corresponde es 4. Una vez fijado esto, se envían ya los valores que van hacia las bombas $u(1, k)$ y $u(2, k)$. El valor del CRC para la trama Modbus es calculado con un sub algoritmo interno.

1.5.2 Comunicación entre PLC Click Koyo y Módulo de control

La instrumentación instalada en el módulo abarca 4 transmisores de presión en el formato 4-20 mA cada uno es llevado a un canal analógico del equipo PLC y sus medidas dan una representación de las alturas de cada tanque y por tanto son la señal de retroalimentación al control. En cuanto a la señal de control el PLC entrega un valor de 0 a 5 V el cual es llevado a una etapa de potencia mediante una tarjeta electrónica.

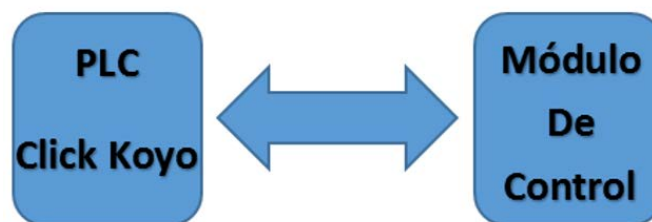


Figura 10. Diagrama de comunicación entre el PLC y el Módulo
Fuente: *Elaboración propia*

La señal de control se ha trabajado para tener una relación lineal entre el valor calculado para los valores de $u(:, k)$ con la tensión que recibe cada bomba. En la figura 11 se muestra el circuito implementado para la etapa de potencia en las bombas y la comunicación.

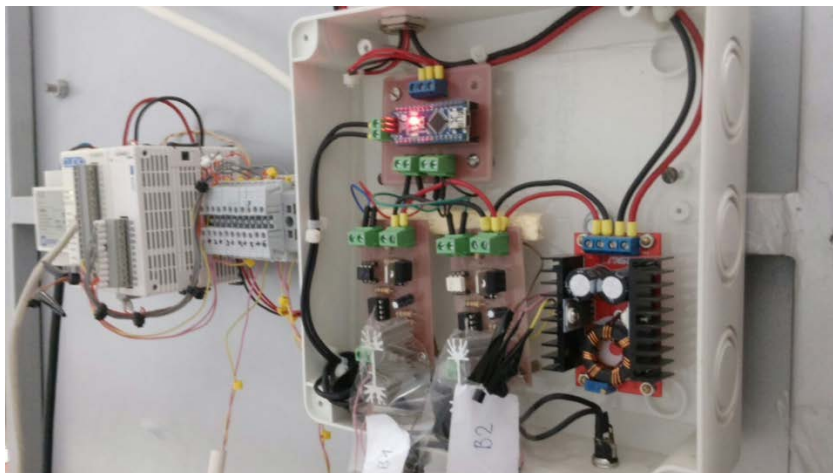


Figura 11. Drivers para manipular las bombas con PWM

Fuente: Propia

También se aprecia el PLC Click Koyo en la parte izquierda y el Arduino Nano que tiene un led color rojo encendido.

1.6 Objetivos

El trabajo de tesis a realizar, tiene por objetivo controlar los niveles del sistema de tanques acoplados, de tal manera que satisfaga los requerimientos de altura solicitados, empleando un sistema de control que establezca aquellos estados de un modo rápido y confiable.

Para cumplir con el objetivo principal es necesario señalar algunos objetivos específicos que permiten alcanzar el logro final de esta tesis:

- Comenzaremos por la obtención del modelo matemático del proceso, que permita describir el comportamiento y la dinámica del sistema. Esto se hará aplicando las herramientas matemáticas aprendidas tales como: ecuaciones diferenciales, leyes físicas, transformada de Laplace, entre otras.
- Implementar un controlador PID multivariable que permita controlar el nivel de dos tanques mediante la manipulación de las dos electrobombas.
- Implementar un controlador MPC multivariable que me pueda solucionar el mismo problema de control.
- Comparar ambas tecnologías de control, permitiendo evaluar ventajas, desventajas y limitaciones que impone el tipo de control aplicado.
- Por último, comprender el comportamiento de este sistema en la industria, a partir de la experimentación tomando en cuenta las particularidades del módulo y comparando con situaciones reales que puedan acontecer en las distintas aplicaciones.

Capítulo 2

Modelación Matemática del sistema

Muchos fenómenos o sistemas que desarrollan determinada actividad en la naturaleza o la industria necesitan ser estudiados, para determinar sus causas, su evolución o para ser controlados. Por ello la necesidad de representar dichos sucesos mediante una herramienta. Es así que surge la modelación matemática permitiendo representar y predecir la realidad de manera rápida y a bajos costos mediante algoritmos lógicos, leyes físicas y químicas.

2.1 Marco teórico

Trabajar con el modelo matemático y no con el sistema real permite estudiar de forma segura, rápida y económica las propiedades del sistema en cualquier situación imaginable tal como lo enuncia [21]. Además es también necesario para poder implementar estrategias de control al sistema analizado.

Uno de los casos más representativos de éste método fue implementado por los gobiernos de Estados Unidos y la Unión Soviética en los años 40 y 50 del siglo XX para la creación de escudos de defensa antiaérea contra misiles nucleares donde la modelación matemática alcanzó todos los intereses esperados.

A continuación se describen los principios físicos de la mecánica de fluidos que se han utilizado en base a ecuaciones diferenciales para el desarrollo del modelo matemático del sistema estudiado.

2.1.1 Ecuación de Bernoulli

El principio de Bernoulli o también llamado trinomio de Bernoulli describe la dinámica de un fluido a lo largo de una corriente. Considerando un fluido ideal que transcurre por un conducto cerrado, la energía que posee el fluido permanece constante a lo largo de su recorrido.

La ecuación de Bernoulli indica que la energía de un fluido en cualquier instante comprende tres componentes:

Cinemática: Es la energía debida a la velocidad que posee el fluido.

Potencial o gravitacional: Es la energía debido a la altitud que un fluido posee.

Energía de presión: Es la energía que un fluido contiene debido a la presión que posee.

$$P + \frac{\rho v^2}{2} + \rho g z = cte \quad (2.1)$$

Dónde:

- v : Es la velocidad del fluido en la sección de análisis.
- ρ : Densidad del fluido.
- P : Presión a lo largo de la línea de corriente.
- z : Altura en dirección de la gravedad desde una cota de referencia.

Para poder aplicar la ecuación debe tenerse presente las siguientes consideraciones: no existe viscosidad, es decir no se encuentra fricción interna en el fluido; el caudal debe ser constante y el flujo incompresible, la ecuación se aplica a un flujo laminar.

En una línea de corriente cada tipo de energía puede aumentar o disminuir, pero siempre manteniendo la suma de ellas constante. El principio de Bernoulli deriva de un análisis integral de la conservación de la Cantidad de movimiento.

2.1.2 Ecuación de continuidad

La ecuación de continuidad consiste en el desarrollo y síntesis del principio de conservación de masa, es una herramienta muy útil para el análisis.

Si un fluido es incompresible y presenta un flujo estacionario, es decir, en régimen laminar y recorre un conducto de diámetro variable, entonces la velocidad de un punto en el conducto será inversamente proporcional al área de la sección transversal en ese punto.

Considerando en la figura 12, que a través de la tubería de corriente impermeable, el balance de masas entrante y saliente es tomado entre los puntos (e) y (s); en consecuencia, el caudal del fluido debe permanecer constante a lo largo de todo el conducto, siempre y cuando su densidad no se altere.

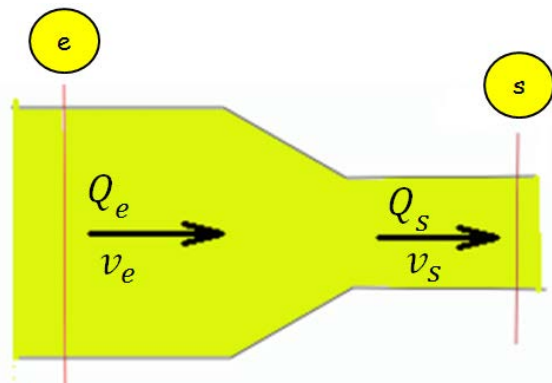


Figura 12. Ducto de análisis
Fuente: Elaboración propia

Como el caudal es el producto del área de una sección del conducto por la velocidad con que fluye el fluido, tendremos que en los puntos de entrada y salida de la tubería se debe cumplir que, el caudal en el punto (e) Q_e es igual que el caudal en el punto (s) Q_s . Que es la ecuación (2.2) de continuidad:

$$Q_e = Q_s \quad \rightarrow \quad S_e * v_e = S_s * v_s \quad (2.2)$$

Dónde:

- S : Es el área de las secciones transversales de los puntos (e) y (s) del volumen de control.
- v : Es la velocidad del fluido en los puntos (e) y (s) del conducto.

Se puede concluir que como el caudal debe permanecer constante a lo largo de todo el conducto entonces, cuando la sección transversal disminuye, la velocidad del flujo aumenta en la misma proporción y de igual forma para el caso contrario. La ecuación (2.3) nos da la velocidad a la salida del volumen de control despejando de la ecuación de continuidad.

$$v_s = v_e * \frac{S_e}{S_s} \quad (2.3)$$

Poniendo un ejemplo, la velocidad de un fluido al recorrer un embudo aumenta de forma proporcional a medida que se reduce el área de la sección.

2.1.3 Ley de Torricelli

Si un tanque presenta un orificio en su parte inferior, y es alimentado por un flujo en su parte superior, tal como muestra la figura 13. Entonces la velocidad del flujo en el punto (ii) es descrita por la Ley de Torricelli.

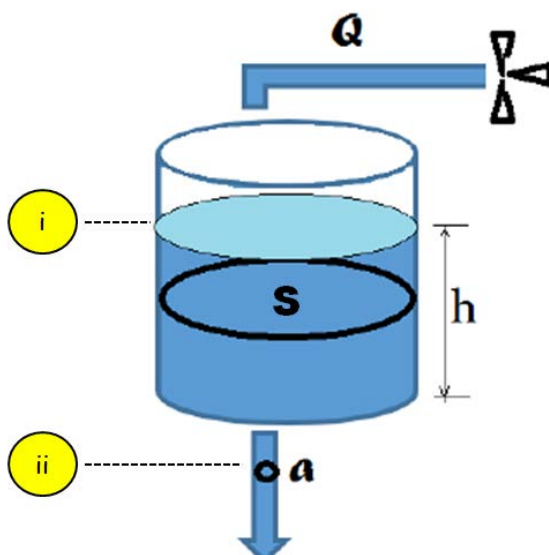


Figura 13. Tanque de análisis
Fuente: Elaboración propia

Para el análisis, que se realiza en las siguientes deducciones, se utiliza la siguiente nomenclatura:

- P_i : Presión absoluta en el punto (i) (Pa)
- P_{ii} : Presión absoluta en el punto (ii) (Pa)
- P_0 : Presión atmosférica (Pa)
- ρ : Densidad del fluido (kg/m³)
- g : Aceleración de la gravedad (m/s²)
- z_i : Altura absoluta del punto (i) (m)
- z_{ii} : Altura absoluta del punto (ii) (m)
- h : Diferencia de alturas entre los puntos (i) y (ii) (m)
- a : Área del orificio en el punto (ii) (m²)
- S : Área transversal del tanque en el punto (i) (m²)
- v_i : Velocidad de descenso del fluido en el punto (i) (m/s)
- v_{ii} : Velocidad de salida del fluido en el punto (ii) (m/s)

Para demostrar la ley de Torricelli, se ha considerado que el fluido que transcurre a través del tanque es ideal, además se utiliza la ecuación (2.4) de Bernoulli para la conservación de la energía entre los puntos (i) y (ii) de la figura 13:

$$P_i + \frac{\rho v_i^2}{2} + \rho g z_i = P_{ii} + \frac{\rho v_{ii}^2}{2} + \rho g z_{ii} \quad (2.4)$$

Los puntos (i) y (ii) se encuentran expuestos a la atmósfera, por lo tanto, la presión estática ejercida en dichos puntos será la misma y viene a ser la presión atmosférica “ P_0 ”.

$$P_0 + \frac{\rho v_i^2}{2} + \rho g z_i = P_0 + \frac{\rho v_{ii}^2}{2} + \rho g z_{ii}$$

$$\frac{\rho v_i^2}{2} + \rho g(z_i - z_{ii}) = \frac{\rho v_{ii}^2}{2} \quad (2.5)$$

Recordando que el fluido también cumple con la ecuación (2.2) de continuidad, entonces:

$$v_i * S = v_{ii} * a \quad \rightarrow \quad v_i = v_{ii} * \frac{a}{S} \quad (2.6)$$

Teniendo presente que la diferencia de niveles entre los puntos (i) y (ii) está representada por “ h ” y reemplazando la ecuación (2.6) en (2.5), se tiene:

$$\frac{\left(\frac{a}{S} v_{ii}\right)^2}{2} + gh = \frac{v_{ii}^2}{2}$$

$$2gh = v_{ii}^2 \left[1 - \left(\frac{a}{S}\right)^2\right]$$

$$v_{ii} = \sqrt{\frac{2gh}{\left[1 - \left(\frac{a}{S}\right)^2\right]}} \quad (2.7)$$

La ecuación (2.7) es la ley de Torricelli, que brinda la velocidad con la que un fluido es descargado desde un tanque de almacenamiento.

2.2 Descripción del modelo matemático

Cabe mencionar que un buen modelo matemático hallado no es necesariamente una representación precisa, sin embargo, lo suficientemente conciso para brindar conclusiones valiosas.

El sistema a analizar consiste de cuatro tanques interconectados, alimentados por dos electrobombas de corriente continua que impulsan el líquido desde un tanque reservorio hacia los cuatro tanques acoplados como se muestra en la figura 14.

2.2.1 Parámetros del Sistema

A las entradas, salidas, dimensiones físicas y propiedades de los elementos que intervengan en el proceso, se les necesitan asignar símbolos para que sea más sencillo su reconocimiento en las ecuaciones que intervengan.

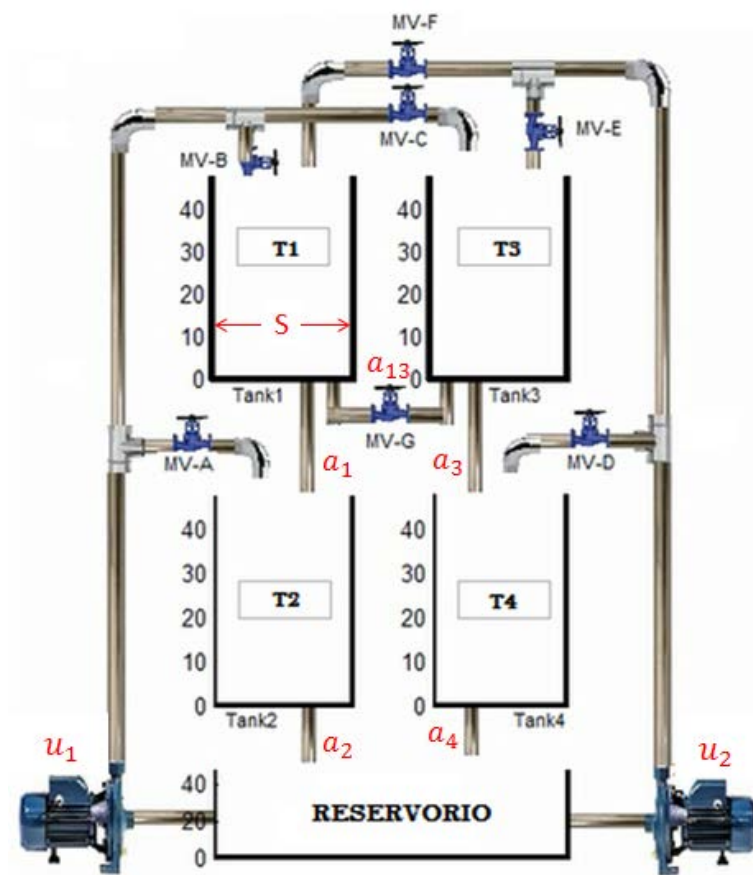


Figura 14. Diagrama del Sistema de tanques acoplados
Fuente: Elaboración propia

Así, para el módulo de tanques acoplados se han escogido los siguientes símbolos para los parámetros utilizados.

- u_1 y u_2 : Tensiones aplicadas a la entrada de las electrobombas DC.
- S : Área transversal de cada tanque.
- h_1, h_2, h_3, h_4 : Niveles de líquido en cada tanque.

- a_1, a_2, a_3, a_4 : Área transversal de los ductos a la salida de cada tanque (*descarga*).
- a_{13} : Área transversal del ducto de acoplamiento entre los tanques T_1 y T_3 .

2.2.2 Circuito recorrido por el fluido

En el diagrama de la figura 15, se muestra la distribución de los caudales proporcionados por las electrobombas y su recorrido y división a través de las tuberías que conducen hacia los cuatro tanques interconectados. También se observa las válvulas que cumplen un papel importante al regular la cantidad de caudal que pasará a cada tanque.

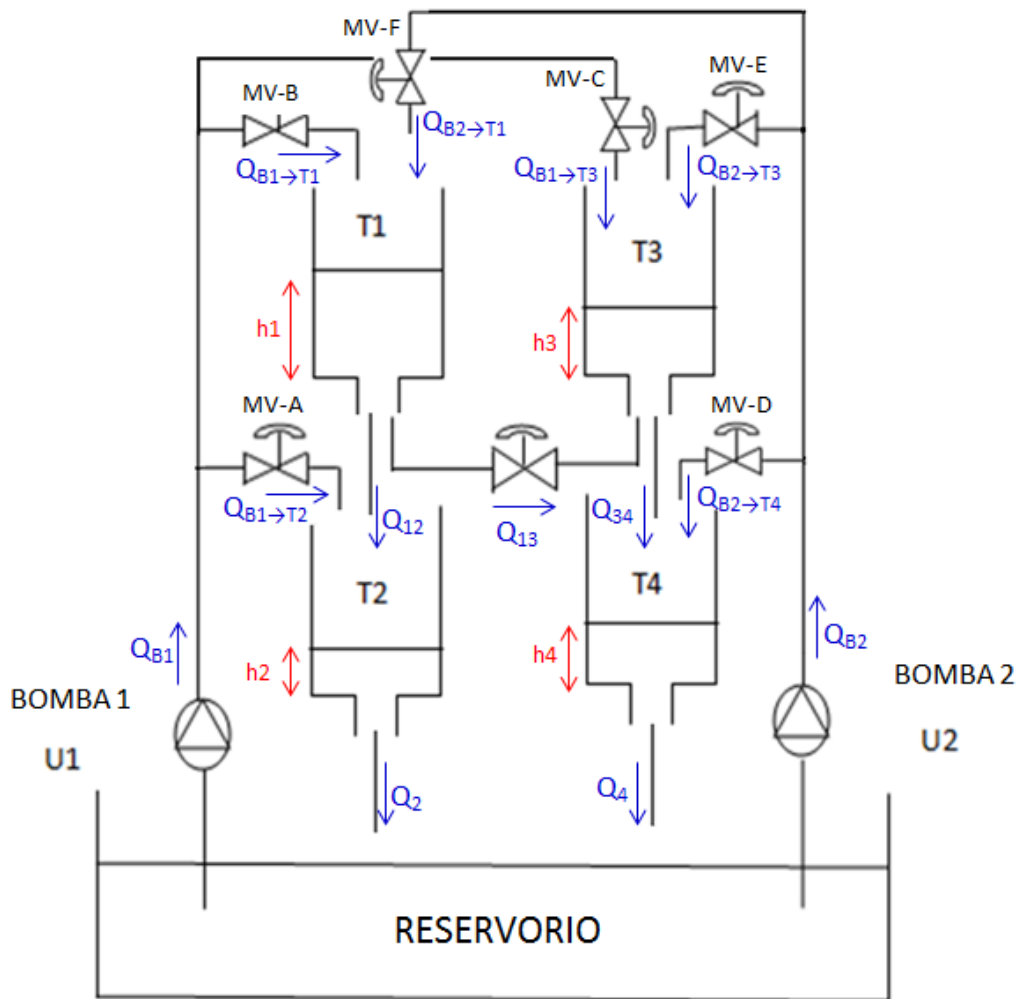


Figura 15. Recorrido del fluido en el Sistema
Fuente: *Elaboración propia*

Por ejemplo, el caudal proporcionado por las electrobombas u_1 y u_2 son Q_{B1} y Q_{B2} respectivamente, se dividen como sigue:

$$Q_{B1} = Q_{B1 \rightarrow T2} + Q_{B1 \rightarrow T1} + Q_{B1 \rightarrow T3} \quad (2.8)$$

$$Q_{B2} = Q_{B2 \rightarrow T4} + Q_{B2 \rightarrow T3} + Q_{B2 \rightarrow T1} \quad (2.9)$$

Por lo tanto cada electrobomba puede abastecer hasta tres tanques, esto depende si la válvula correspondiente está abierta o cerrada.

Los caudales Q_{12} , Q_2 , Q_{13} , Q_{34} y Q_4 son los caudales de drenaje de cada tanque, teniendo en cuenta que Q_{13} puede ser positivo o negativo dependiendo del sentido en el que se dirija.

2.2.3 Modelo matemático

Para plantear las ecuaciones diferenciales que definan el modelo matemático, consideraremos lo siguiente; como el área del conducto de descarga (drenaje) es muy pequeña en comparación con el área transversal del tanque, entonces:

$$\frac{a}{S} \approx 0 \quad (2.10)$$

Reemplazando (2.10) en la ley de Torricelli (2.7) queda que la ecuación para representar la velocidad de descarga a la salida de un tanque, que se utilizara en el modelo matemático es la siguiente:

$$v_{ii} = \sqrt{2gh} \quad (2.11)$$

Haciendo un análisis similar, se puede demostrar que la ecuación para representar la velocidad del flujo que pasa entre el acoplamiento del Tanque 1 y Tanque 3 cuando h_1 es mayor que h_3 , es la siguiente:

$$v_{13} = \sqrt{2g|h_1 - h_3|} \quad (2.12)$$

Si el nivel de h_3 es mayor que h_1 solo cambia el signo de la ecuación (2.12).

Se procede a plantear las ecuaciones diferenciales que rigen el comportamiento del nivel en cada tanque con relación a los flujos, resultando las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} S \frac{dh_1}{dt} &= Q_{B1 \rightarrow T1} + Q_{B2 \rightarrow T1} - Q_{12} \pm Q_{13} \\ S \frac{dh_2}{dt} &= Q_{B1 \rightarrow T2} + Q_{12} - Q_2 \\ S \frac{dh_3}{dt} &= Q_{B1 \rightarrow T3} + Q_{B2 \rightarrow T3} - Q_{34} \mp Q_{13} \\ S \frac{dh_4}{dt} &= Q_{B2 \rightarrow T4} + Q_{34} - Q_4 \end{aligned} \quad (2.13)$$

Las ecuaciones de (2.13) se pueden interpretar observando para cada tanque a partir del diagrama de la figura 15. Cabe resaltar que en esta modelación no se han considerado las pérdidas por el transporte del fluido.

Teniendo en cuenta la ley de Torricelli de las ecuaciones (2.11) y (2.12) para la estimación de la velocidad de drenaje en cada tanque y acomodando términos, las ecuaciones diferenciales (2.13) quedan de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\frac{dh_1}{dt} &= \frac{k(mvb)}{S} u_1 + \frac{k(mvf)}{S} u_2 - \frac{a_1}{S} \sqrt{2gh_1} \pm \frac{a_{13}}{S} \sqrt{2g|h_1 - h_3|} \\
\frac{dh_2}{dt} &= \frac{k(mva)}{S} u_2 + \frac{a_1}{S} \sqrt{2gh_1} - \frac{a_2}{S} \sqrt{2gh_2} \\
\frac{dh_3}{dt} &= \frac{k(mvc)}{S} u_1 + \frac{k(mve)}{S} u_2 - \frac{a_3}{S} \sqrt{2gh_3} \mp \frac{a_{13}}{S} \sqrt{2g|h_1 - h_3|} \\
\frac{dh_4}{dt} &= \frac{k(mvd)}{S} u_2 + \frac{a_3}{S} \sqrt{2gh_3} - \frac{a_4}{S} \sqrt{2gh_4}
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Las unidades de los términos de las ecuaciones están en el sistema internacional, pero las unidades del caudal proporcionado por las electrobombas en su diseño está en el orden de "l/min" y el nivel de líquido en los tanques para una mejor apreciación se expresará en "cm", entonces, para mayor comodidad de manipulación y medición de las salidas, se realiza un cambio de unidades:

$$\begin{aligned}
h(m) &\rightarrow f_2 * h(cm) \\
k\left(\frac{m^3}{s * V}\right) &\rightarrow f_1 * k\left(\frac{l}{min * V}\right)
\end{aligned}$$

Las ecuaciones se ven alteradas por dos factores que permiten expresarlas en las unidades requeridas, $f_1 = 100/6$ y $f_2 = 10$. Donde las ecuaciones diferenciales adquieren la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
\frac{dh_1}{dt} &= f_1 \frac{k(mvb)}{S} u_1 + f_1 \frac{k(mvf)}{S} u_2 - f_2 \frac{a_1}{S} \sqrt{2gh_1} \pm f_2 \frac{a_{13}}{S} \sqrt{2g|h_1 - h_3|} \\
\frac{dh_2}{dt} &= f_1 \frac{k(mva)}{S} u_2 + f_2 \frac{a_1}{S} \sqrt{2gh_1} - f_2 \frac{a_2}{S} \sqrt{2gh_2} \\
\frac{dh_3}{dt} &= f_1 \frac{k(mvc)}{S} u_1 + f_1 \frac{k(mve)}{S} u_2 - f_2 \frac{a_3}{S} \sqrt{2gh_3} \mp f_2 \frac{a_{13}}{S} \sqrt{2g|h_1 - h_3|} \\
\frac{dh_4}{dt} &= f_1 \frac{k(mvd)}{S} u_2 + f_2 \frac{a_3}{S} \sqrt{2gh_3} - f_2 \frac{a_4}{S} \sqrt{2gh_4}
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Las ecuaciones de (2.15) representan el comportamiento del sistema analizado, los diferenciales de altura con respecto al tiempo son las velocidades de ascenso o descenso del fluido en cada tanque. Se nota además que el ingreso de caudal a cada tanque está ligado al grado de apertura de su válvula que le corresponde.

2.2.4 Simulación del modelo matemático

La simulación matemática es una herramienta que se utiliza en una amplia gama de problemas para diversas materias como la Física, Ingeniería, Ciencias sociales, Economía, etc. Se realiza en un ordenador utilizando el software apropiado. Lo importante es que se puede aprovechar las capacidades de la computadora para realizar las simulaciones del modelo matemático y así conseguir resultados cercanos a la realidad.

- Sistema de Tanques Acoplados

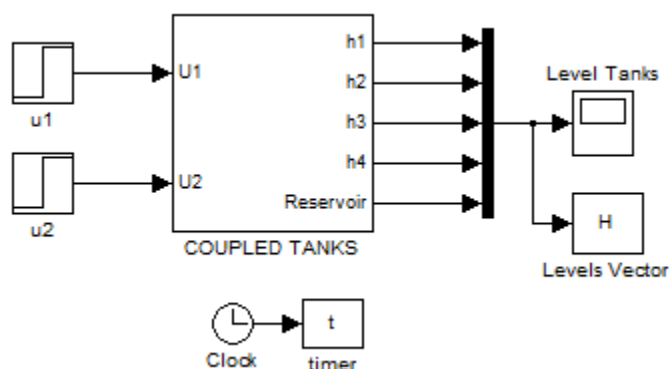


Figura 20. Diagrama del sistema de tanques acoplados
Fuente: Elaboración propia

Finalmente en la figura 20 se unen los subsistemas de los tanques y son agrupados en un solo bloque que representa a todo el Sistema, en él se puede apreciar las dos entradas, las cuatro salidas y el nivel del reservorio para cuidar que no se quedara vacío.

Se realizaron tres simulaciones para poder analizar al detalle el comportamiento del sistema ante diferentes parámetros de configuración. Estos análisis se muestran en los siguientes apartados.

2.2.4.1 Simulación del Modelo Matemático N°1

La primera simulación del modelo matemático (MNL N°1) la realizaremos con los datos de la tabla 1, donde se muestran los valores asignados a los parámetros para el sistema de tanques acoplados.

Tabla 1- Parámetros para la Simulación MNL N°1

Parámetro	Magnitud	Unidad
u_1	9	Volts
u_2	13	Volts
a_1	0.3	cm^2
a_2	0.6	cm^2
a_3	0.5	cm^2
a_4	0.8	cm^2
a_{13}	0.3	cm^2
mva	60	%
mvb	20	%
mvc	20	%
mvd	60	%
mve	20	%
mvf	20	%
S	100	cm^2
k	0.9375	$l/(min * Volt)$
g	9.81	m/s^2

f_1	100/6	—
f_2	10	—

Fuente: Elaboración propia

En la figura 21 se puede observar el comportamiento de los niveles en los tanques a lo largo del tiempo para los valores específicos de tensión aplicados en la entrada y las válvulas con grados de apertura especificado.

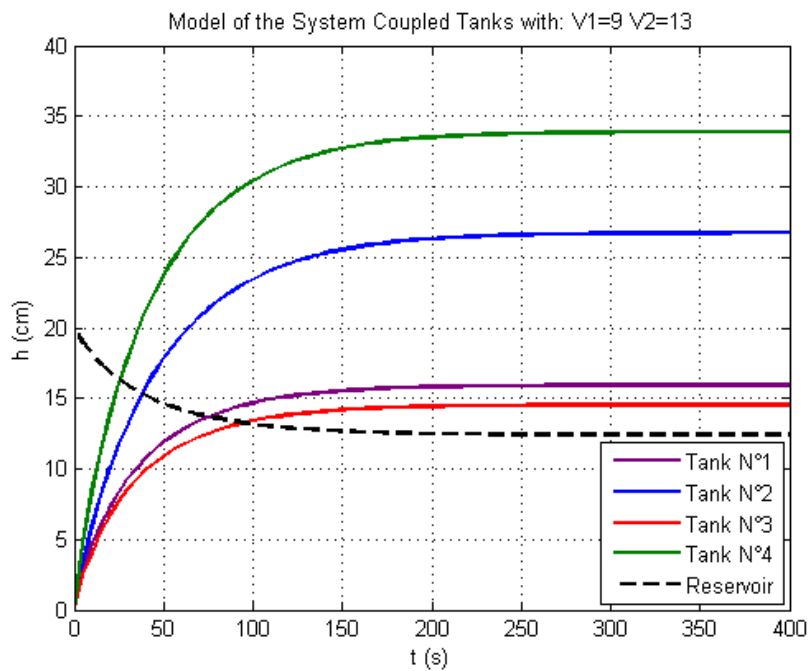


Figura 21. Comportamiento del nivel de los tanques acoplados para la Simulación MNL N°1
Fuente: Elaboración propia

Los valores estacionarios de las tensiones en las electrobombas son los mismos, ya que, no se manipularon por ser un ensayo a lazo abierto; también se observa que el nivel estacionario es diferente en cada tanque, estos valores son resultados de la simulación y mostrados en la tabla 2.

Tabla 2- Resultados de la Simulación MNL N°1

Variable	Magnitud	Unidad
u_1	9	<i>Volts</i>
u_2	13	<i>Volts</i>
h_{10}	15.94	<i>cm</i>
h_{20}	26.73	<i>cm</i>
h_{30}	14.54	<i>cm</i>
h_{40}	33.9	<i>cm</i>

Fuente: Elaboración propia

2.2.4.2 Simulación Modelo Matemático N°2

La segunda simulación del modelo matemático (MNL N°2) la realizaremos con los datos de la tabla 3, que corresponden a los parámetros reales del sistema de tanques acoplados con los que se trabajarán para realizar la identificación en el apartado 3.3.4 e implementar las estrategias de control clásico y predictivo en el capítulo 5.

Tabla 3- Parámetros para la Simulación MNL N°2

Parámetro	Magnitud	Unidad
u_1	21.5	Volts
u_2	22	Volts
a_1	0.3167	cm^2
a_2	0.3167	cm^2
a_3	0.3167	cm^2
a_4	0.3167	cm^2
a_{13}	1.2667	cm^2
mva	10	%
mvb	0	%
mvc	100	%
mvd	15	%
mve	0	%
mvf	100	%
S	100	cm^2
k	0.9375	$l/(min * Volt)$
g	9.81	m/s^2
f_1	100/6	—
f_2	10	—

Fuente: Elaboración propia

El área de descarga de los cuatro tanques (a_1 , a_2 , a_3 y a_4) es la misma para todos, debido a que son pequeños orificios de diámetro igual a un cuarto de pulgada (1/4"). Además las tensiones aplicadas a las electrobombas $u_1 = 21.5$ V y $u_2 = 22$ V son próximas a la tensión nominal 24 V pero no hay problema porque en el caso que éstas tensiones aumenten, las electrobombas pueden trabajar hasta un rango por encima del 20% del valor nominal, es decir, hasta un poco más de 28V.

El porcentaje de apertura en las válvulas mvb y mve son cero, esto significa que están completamente cerradas y que cada electrobomba solo alimenta a dos tanques de manera cruzada, por lo que no se pierde la interacción del sistema.

En la figura 22 se puede observar la simulación del comportamiento de los niveles en los tanques a lo largo del tiempo para los valores específicos de tensión aplicados en la entrada y las válvulas con grados de apertura especificado. Hay que tener cuidado con que el nivel del reservorio no descienda hasta alcanzar un valor por debajo de cero, ya que esto

significaría que el reservorio se quede sin agua para seguir abasteciendo y las electrobombas estarían aspirando aire, lo cual sería muy perjudicial.

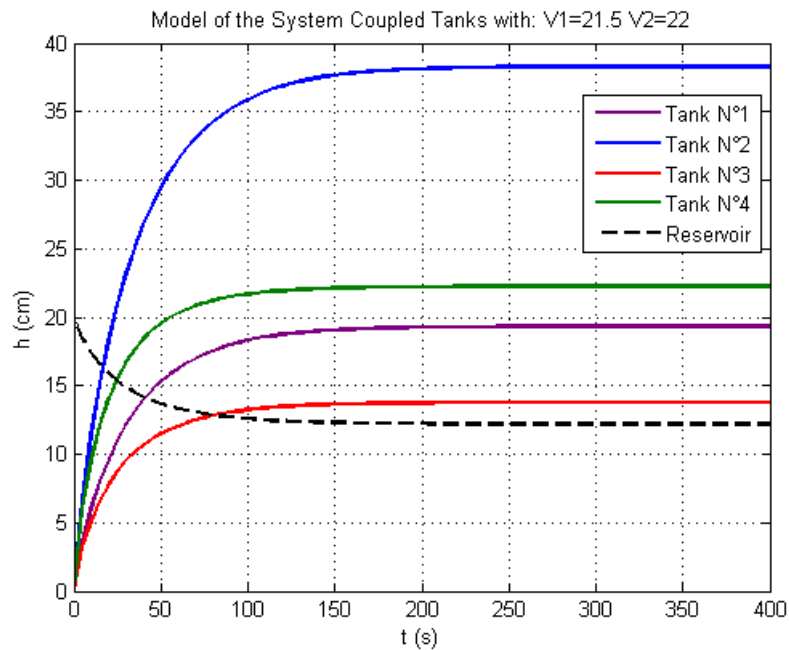


Figura 22. Comportamiento del nivel de los tanques acoplados para la Simulación MNL N°2
Fuente: Elaboración propia

Los valores estacionarios de las tensiones en las electrobombas son los mismos, ya que, no se manipularon por ser un ensayo a lazo abierto; también se observa que el nivel estacionario es diferente en cada tanque, estos valores son resultados de la simulación y mostrados en la tabla 4.

Tabla 4- Resultados de la Simulación MNL N°2

Variable	Magnitud	Unidad
u_1	21.5	Volts
u_2	22	Volts
h_{10}	19.3	cm
h_{20}	38.3	cm
h_{30}	13.7	cm
h_{40}	22.2	cm

Fuente: Elaboración propia

Capítulo 3

Linealización y validación del modelo matemático

El sistema de ecuaciones (2.15) obtenido de la modelación matemática, es un sistema no lineal, eso ocasiona un problema al implementarle estrategias lineales de control, ya que la salida en respuesta a dos entradas del sistema no puede obtenerse tratando a cada entrada por separado y luego sumando el resultado de las respuestas [22], es decir, no están sujetos al principio de superposición.

Una forma de obtener soluciones para sistemas que involucran no linealidades es mediante sistemas lineales “equivalentes”. Los sistemas lineales equivalentes sólo son válidos para un rango limitado de operación, pero la ventaja es que en el modelo matemático lineal pueden aplicarse herramientas lineales para análisis y estrategias lineales de control.

La interpretación gráfica de una linealización es la línea tangente en una curva que representa el sistema no lineal. Dónde el punto de tangencia se interpreta como el punto de operación o el punto de equilibrio del sistema.

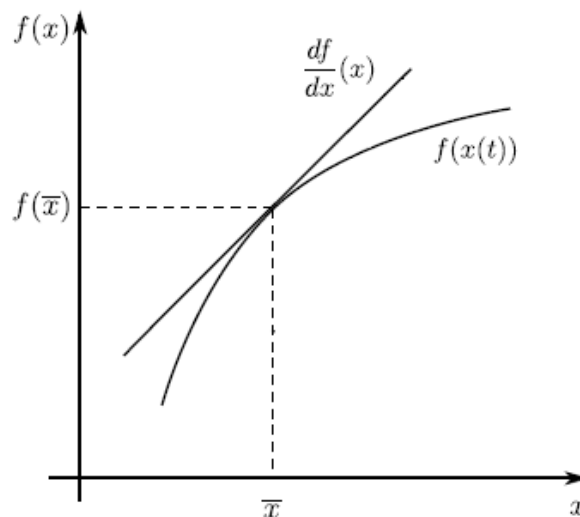


Figura 23. Aproximación lineal

Fuente: [23]

La recta simboliza la derivada de la función en un punto particular, lo cual es la representación lineal de la función en ese punto particular.

3.1 Descripción de la serie de Taylor

El proceso de linealizar sistemas no lineales es importante, porque permite aplicar numerosos métodos que proporcionan información acerca del comportamiento de dichos sistemas.

La serie de Taylor es muy recomendada para aproximar una función en un punto y ser expresada mediante términos que comprenden al valor de la función y términos que contienen derivadas de la función. Consiste en la expansión de la función no lineal en series de Taylor alrededor de un punto de operación y la retención de solamente el término lineal [23].

Considerando una ecuación diferencial de primer orden:

$$\frac{dx(t)}{dt} = f[x(t)] + k \quad (3.1)$$

Dónde $f[x(t)]$ es una función no lineal de x y k es una constante. La expansión de las series de Taylor para $f[x(t)]$ alrededor de un punto \bar{x} viene dada por:

$$\begin{aligned} f[x(t)] = f(\bar{x}) &+ \frac{d(x = \bar{x})}{dx} [x(t) - \bar{x}] + \frac{1}{2!} \frac{d^2(x = \bar{x})}{dx^2} [x(t) - \bar{x}]^2 \\ &+ \frac{1}{3!} \frac{d^3(x = \bar{x})}{dx^3} [x(t) - \bar{x}]^3 + \dots \end{aligned} \quad (3.2)$$

Dónde:

$\frac{d(x=\bar{x})}{dx}$: denota la derivada de f evaluada en $x = \bar{x}$.

La aproximación lineal consiste en truncar la ecuación (3.2) en los dos primeros términos, es decir:

$$f[x(t)] = f(\bar{x}) + \frac{d(x = \bar{x})}{dx} [x(t) - \bar{x}] \quad (3.3)$$

3.2 Ecuaciones Linealizadas

Se linealizaron las cuatro ecuaciones de (2.15) en torno al punto de trabajo, es decir, en h_{10} , h_{20} , h_{30} y h_{40} obtenidos de las simulaciones en Simulink de Matlab a partir de u_{10} y u_{20} establecidos previamente.

Al linealizar en el punto de trabajo o equilibrio, los niveles de cada tanque serán constantes, ya que el proceso estará en estado estacionario, por lo tanto:

$$\frac{dh_{10}}{dt} = \frac{dh_{20}}{dt} = \frac{dh_{30}}{dt} = \frac{dh_{40}}{dt} = 0$$

- Tanque N°1

$$\begin{aligned} \frac{dh_1}{dt} = & \left[f_1 \frac{k(mvb)}{S} \right] (u_1 - u_{10}) + \left[f_1 \frac{k(mvf)}{S} \right] (u_2 - u_{20}) \\ & - \left[\frac{f_2}{S} \sqrt{\frac{g}{2}} \left(\frac{a_1}{\sqrt{h_{10}}} + \frac{a_{13}}{\sqrt{|h_{10} - h_{30}|}} \right) \right] (h_1 - h_{10}) + \left[\frac{f_2}{S} \sqrt{\frac{g}{2}} \frac{a_{13}}{\sqrt{|h_{10} - h_{30}|}} \right] (h_3 - h_{30}) \end{aligned} \quad (3.4)$$

- Tanque N°2

$$\frac{dh_2}{dt} = \left[f_1 \frac{k(mva)}{S} \right] (u_1 - u_{10}) + \left[\frac{f_2}{S} \sqrt{\frac{g}{2}} \left(\frac{a_1}{\sqrt{h_{10}}} \right) \right] (h_1 - h_{10}) - \left[\frac{f_2}{S} \sqrt{\frac{g}{2}} \left(\frac{a_2}{\sqrt{h_{20}}} \right) \right] (h_2 - h_{20}) \quad (3.5)$$

- Tanque N°3

$$\frac{dh_3}{dt} = \left[f_1 \frac{k(mvc)}{S} \right] (u_1 - u_{10}) + \left[f_1 \frac{k(mve)}{S} \right] (u_2 - u_{20}) + \left[\frac{f_2}{S} \sqrt{\frac{g}{2}} \frac{a_{13}}{\sqrt{|h_{10} - h_{30}|}} \right] (h_1 - h_{10}) - \left[\frac{f_2}{S} \sqrt{\frac{g}{2}} \left(\frac{a_3}{\sqrt{h_{30}}} + \frac{a_{13}}{\sqrt{|h_{10} - h_{30}|}} \right) \right] (h_3 - h_{30}) \quad (3.6)$$

- Tanque N°4

$$\frac{dh_4}{dt} = \left[f_1 \frac{k(mvd)}{S} \right] (u_2 - u_{20}) + \left[\frac{f_2}{S} \sqrt{\frac{g}{2}} \left(\frac{a_3}{\sqrt{h_{30}}} \right) \right] (h_3 - h_{30}) - \left[\frac{f_2}{S} \sqrt{\frac{g}{2}} \left(\frac{a_4}{\sqrt{h_{40}}} \right) \right] (h_4 - h_{40}) \quad (3.7)$$

Luego, se hace el siguiente cambio de variables:

$$\bar{u}_i = u_i - u_{i0} \quad \text{para } i=1,2.$$

$$\bar{h}_j = h_j - h_{j0} \quad \text{para } j=1,2,3,4.$$

Y las ecuaciones quedan expresadas en función de las desviaciones como se muestra:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{h}_1}{dt} &= - \left[\frac{f_2}{S} \sqrt{\frac{g}{2}} \left(\frac{a_1}{\sqrt{h_{10}}} + \frac{a_{13}}{\sqrt{|h_{10} - h_{30}|}} \right) \right] \bar{h}_1 + \left[\frac{f_2}{S} \sqrt{\frac{g}{2}} \frac{a_{13}}{\sqrt{|h_{10} - h_{30}|}} \right] \bar{h}_3 + \left[f_1 \frac{k(mvb)}{S} \right] \bar{u}_1 + \left[f_1 \frac{k(mvf)}{S} \right] \bar{u}_2 \\ \frac{d\bar{h}_2}{dt} &= \left[\frac{f_2}{S} \sqrt{\frac{g}{2}} \left(\frac{a_1}{\sqrt{h_{10}}} \right) \right] \bar{h}_1 - \left[\frac{f_2}{S} \sqrt{\frac{g}{2}} \left(\frac{a_2}{\sqrt{h_{20}}} \right) \right] \bar{h}_2 + \left[f_1 \frac{k(mva)}{S} \right] \bar{u}_1 \\ \frac{d\bar{h}_3}{dt} &= \left[\frac{f_2}{S} \sqrt{\frac{g}{2}} \frac{a_{13}}{\sqrt{|h_{10} - h_{30}|}} \right] \bar{h}_1 - \left[\frac{f_2}{S} \sqrt{\frac{g}{2}} \left(\frac{a_3}{\sqrt{h_{30}}} + \frac{a_{13}}{\sqrt{|h_{10} - h_{30}|}} \right) \right] \bar{h}_3 + \left[f_1 \frac{k(mvc)}{S} \right] \bar{u}_1 + \left[f_1 \frac{k(mve)}{S} \right] \bar{u}_2 \\ \frac{d\bar{h}_4}{dt} &= \left[\frac{f_2}{S} \sqrt{\frac{g}{2}} \left(\frac{a_3}{\sqrt{h_{30}}} \right) \right] \bar{h}_3 - \left[\frac{f_2}{S} \sqrt{\frac{g}{2}} \left(\frac{a_4}{\sqrt{h_{40}}} \right) \right] \bar{h}_4 + \left[f_1 \frac{k(mvd)}{S} \right] \bar{u}_2 \end{aligned} \quad (3.8)$$

Se aprecia que se han reordenado los términos y factorizado las variables comunes; el sistema sigue teniendo dos entradas \bar{u}_1 y \bar{u}_2 , y las salidas se pueden considerar las desviaciones de los niveles \bar{h}_1 , \bar{h}_2 , \bar{h}_3 y \bar{h}_4 . Ahora se buscará representar el modelo en algún formato estándar para su análisis correspondiente.

3.2.1 Representación del modelo lineal en espacio de estados

Es la representación mediante una ecuación diferencial de primer orden y con notación matricial para un modelo físico que inicialmente está expresado en un conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden relacionadas entre sí e invariante en el tiempo. Provee un modelo compacto y versátil al representar de manera natural sistemas con varias entradas y varias salidas para ser analizados.

Para representar un sistema dinámico en el sistema de espacio de estados se usan tres tipos de variables: variables de entrada, variables de salida y las variables de estado. El vector variable de estados es el subconjunto más pequeño de variables de un sistema. Las variables de estados deben ser independientes, es decir, una variable de estado no puede ser resultado de una combinación lineal de otras variables de estado. Si se tuviese un sistema expresado en función de transferencia, entonces, el número mínimo de variables de estado viene a ser el orden del denominador de la función de transferencia después de haber sido simplificada hasta ser una fracción propia.

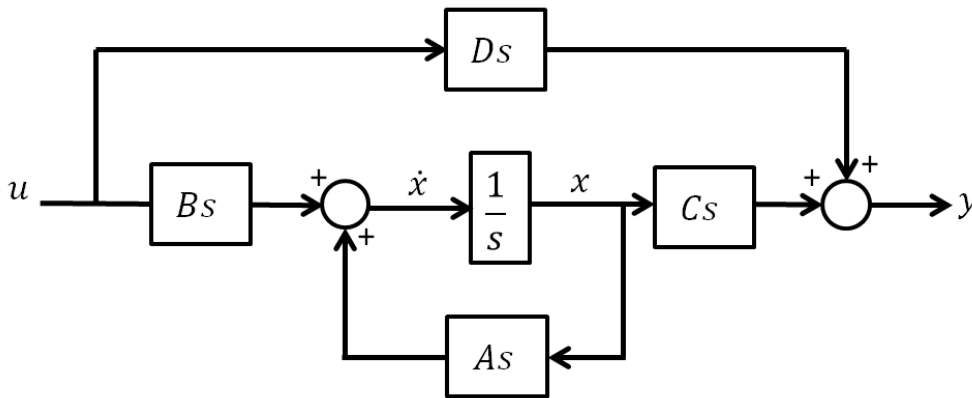


Figura 24. Modelo en Espacio de Estados
Fuente: Elaboración propia

La representación de espacio de estados en el campo temporal para un sistema lineal con p entradas, q salidas y n variables de estado es la siguiente:

$$\dot{x}(t) = As(t) * x(t) + Bs(t) * u(t) \quad (3.9)$$

$$y(t) = Cs(t) * x(t) + Ds(t) * u(t) \quad (3.10)$$

Dónde:

- $dim[As(t)] = n \times n$,
- $dim[Bs(t)] = n \times p$,
- $dim[Cs(t)] = q \times n$,
- $dim[Ds(t)] = q \times p$,
- $\dot{x}(t) = dx(t)/dt$,

Procedemos a describir las matrices y vectores de las ecuaciones (3.9) y (3.10): $x(t)$ es el vector variable de estados, $y(t)$ es el vector que alberga a las salidas del sistema, $u(t)$ es el

vector de entradas, $As(t)$ es la matriz de estados, $Bs(t)$ es la matriz de entradas, $Cs(t)$ es la matriz de salidas y $Ds(t)$ es la matriz de transmisión directa.

Observando el sistema de ecuaciones (3.8) y la ecuación (3.9) procedemos a realizar una analogía de los términos, y se identifican las siguientes matrices:

$$x = \begin{bmatrix} \bar{h}_1 \\ \bar{h}_2 \\ \bar{h}_3 \\ \bar{h}_4 \end{bmatrix} \rightarrow \dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{\bar{h}}_1 \\ \dot{\bar{h}}_2 \\ \dot{\bar{h}}_3 \\ \dot{\bar{h}}_4 \end{bmatrix}; As = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}; Bs = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & 0 \\ b_{31} & b_{32} \\ 0 & b_{42} \end{bmatrix}; u = \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Dónde:

$$\begin{aligned} \bullet \quad a_{11} &= -\frac{f_2}{s} \sqrt{\frac{g}{2}} \left(\frac{a_1}{\sqrt{h_{10}}} + \frac{a_{13}}{\sqrt{|h_{10}-h_{30}|}} \right) & \bullet \quad b_{11} &= f_1 \left[\frac{k(mvb)}{s} \right] \\ \bullet \quad a_{13} &= a_{31} = \frac{f_2}{s} \sqrt{\frac{g}{2}} \left(\frac{a_{13}}{\sqrt{|h_{10}-h_{30}|}} \right) & \bullet \quad b_{12} &= f_1 \left[\frac{k(mvf)}{s} \right] \\ \bullet \quad a_{21} &= \frac{f_2}{s} \sqrt{\frac{g}{2}} \left(\frac{a_1}{\sqrt{h_{10}}} \right) & \bullet \quad b_{21} &= f_1 \left[\frac{k(mva)}{s} \right] \\ \bullet \quad a_{22} &= -\frac{f_2}{s} \sqrt{\frac{g}{2}} \left(\frac{a_2}{\sqrt{h_{20}}} \right) & \bullet \quad b_{31} &= f_1 \left[\frac{k(mvc)}{s} \right] \\ \bullet \quad a_{33} &= -\frac{f_2}{s} \sqrt{\frac{g}{2}} \left(\frac{a_3}{\sqrt{h_{30}}} + \frac{a_{13}}{\sqrt{|h_{10}-h_{30}|}} \right) & \bullet \quad b_{32} &= f_1 \left[\frac{k(mve)}{s} \right] \\ \bullet \quad a_{43} &= \frac{f_2}{s} \sqrt{\frac{g}{2}} \left(\frac{a_3}{\sqrt{h_{30}}} \right) & \bullet \quad b_{42} &= f_1 \left[\frac{k(mvd)}{s} \right] \\ \bullet \quad a_{44} &= -\frac{f_2}{s} \sqrt{\frac{g}{2}} \left(\frac{a_4}{\sqrt{h_{40}}} \right) \end{aligned}$$

Ahora, para la salida del sistema, elijamos $y = x = [\bar{h}_1 \quad \bar{h}_2 \quad \bar{h}_3 \quad \bar{h}_4]^T$ y comparando los términos entre las ecuaciones (3.8) y (3.10) se identifica que:

$$Cs = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad Ds = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Ya tenemos las matrices, con lo cual se puede hacer el diagrama semejante al de la figura 24 para simular y analizar el comportamiento del sistema lineal. Luego, se puede comparar el modelo lineal con el modelo no lineal para observar las similitudes.

Cabe resaltar que para los sistemas de control implementados en los capítulos posteriores, solo se considerarán dos salidas, por lo que el vector “y” cambiará de dimensión y pasará a ser $y = [\bar{h}_2 \quad \bar{h}_4]^T$, la matriz Cs también cambiará y pasará a ser:

$$Cs = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Mientras que las matrices As, Bs, Ds y el vector de estados x no sufrirán cambios.

3.2.2 Simulación del modelo lineal

Con las matrices halladas en las ecuaciones (3.11) y (3.12) implementamos el diagrama de bloques en Simulink de Matlab, donde solamente utilizamos las matrices As y Bs , ya que las matrices Cs y Ds de (3.12) no alteran en nada el resultado.

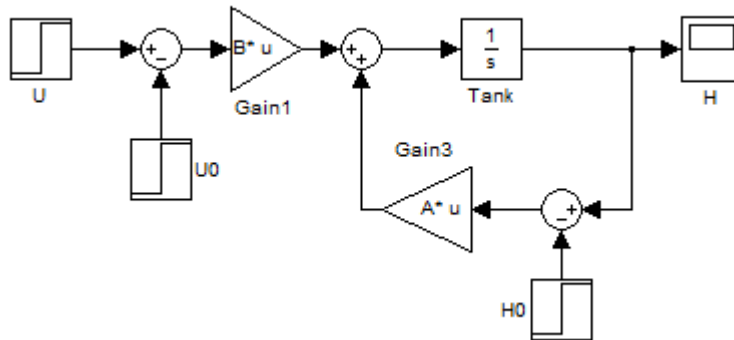


Figura 25. Diagrama de bloques del modelo lineal
Fuente: Elaboración propia

El diagrama del modelo lineal de la figura 25 también incluye a los vectores U_0 y H_0 que contienen a los valores de las entradas y salidas del sistema cuando el proceso alcanza el punto de trabajo:

$$H_0 = [h_{10} \quad h_{20} \quad h_{30} \quad h_{40}]^T$$

$$U_0 = [u_{10} \quad u_{20}]^T$$

Además, para relacionar con las ecuaciones (3.11) y (3.12) debemos tener en cuenta lo siguiente:

$$x = H - H_0$$

$$u = U - U_0$$

Desdoblamos la ecuación (3.11) para identificar las operaciones básicas que están representadas en el diagrama de bloques de la figura 25:

$$\dot{x} = As * x + Bs * u$$

$$\dot{x} = As * (H - H_0) + Bs * (U - U_0)$$

Teniendo listo, se procede a realizar las simulaciones en Matlab moviendo los parámetros para observar distintos resultados y comparándolos con los resultados del modelo no lineal (de ecuaciones diferenciales), así poder evaluar la similitud de sus comportamientos.

3.2.2.1 Simulación Modelo Lineal N°1

Se ha realizado la primera simulación (ML N°1) con los mismos parámetros de la Tabla 1 del apartado 2.2.4 para comparar los desempeños de ambos modelos. Haciendo primero un análisis desde que se pone en marcha el proceso hasta que llega punto de equilibrio, posteriormente en el apartado 3.4 se realiza un análisis partiendo desde el estado estacionario, realizando pequeñas variaciones en la entrada del proceso.

Los valores de las tensiones de las bombas a la entrada son pequeños, por ello los niveles alcanzados no serán tan altos.

Tabla 5- Parámetros de simulación para la Simulación N°1

Parámetro	Magnitud	Unidad
u_1	9	Volts
u_2	13	Volts
a_1	0.3	cm^2
a_2	0.6	cm^2
a_3	0.5	cm^2
a_4	0.8	cm^2
a_{13}	0.3	cm^2
mva	60	%
$m vb$	20	%
$m vc$	20	%
$m vd$	60	%
$m ve$	20	%
$m vf$	20	%
S	100	cm^2
k	0.9375	$l/(min * Volt)$
g	9.81	m/s^2
f_1	100/6	—
f_2	10	—

Fuente: Elaboración propia

La figura 26 corresponde a la gráfica del comportamiento del modelo lineal con líneas continuas, versus el modelo no lineal con líneas discontinuas; para un tiempo de simulación $t=400$ s donde el proceso logra llegar a su punto de trabajo para las condiciones de preestablecidos.

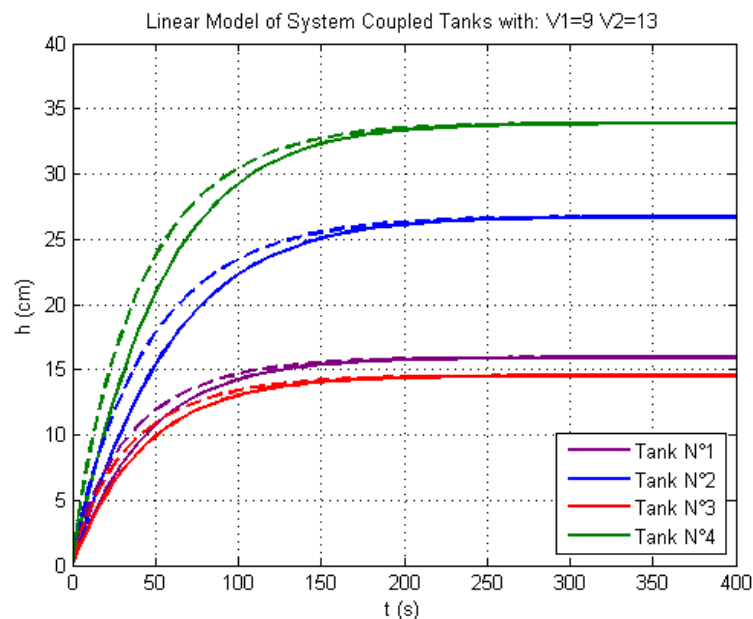


Figura 26. Comportamiento del Modelo no lineal y el Modelo lineal para la Simulación N°1

Fuente: Elaboración propia

Los cuatro niveles mostrados en la gráfica son debido a que la salida del proceso se está considerando igual al vector de estados, es decir, con la matriz Cs de la ecuación (3.12). Sin embargo al realizar la simulación considerando la ecuación (3.13) para el nuevo valor de la matriz Cs la salida del sistema solo presenta el nivel de dos tanques (Ver figura 27), esta última será considerada para implementar los algoritmos de control.

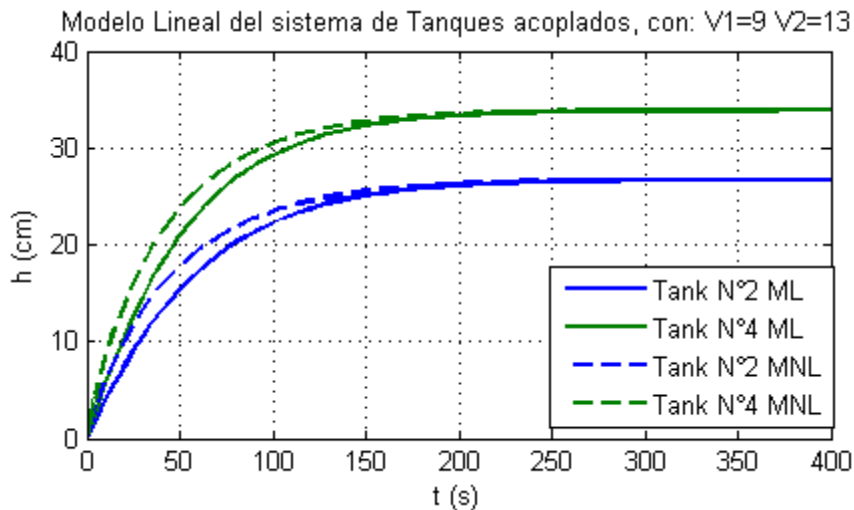


Figura 27. Comparación de modelos para la Simulación N°1 considerando la ecuación (3.13)

Fuente: Elaboración propia

El tanque N°4 alcanza un nivel superior al de los otros tres; y también es importante señalar que en el periodo transitorio si hay diferencias debido a las no linealidades del modelo inicial y que además el modelo lineal obtenido es solamente de primer orden.

3.2.2.2 Simulación Modelo Lineal N°2

En esta simulación (ML N°2) utilizamos los parámetros de la Tabla 3, el cual tiene valores de tensión un poco más altos y permite alcanzar mayor nivel estacionario de los tanques.

Tabla 6- Parámetros de simulación para la Simulación N°2

Parámetro	Magnitud	Unidad
u_1	21.5	Volts
u_2	22	Volts
a_1	0.3167	cm^2
a_2	0.3167	cm^2
a_3	0.3167	cm^2
a_4	0.3167	cm^2
a_{13}	1.2667	cm^2
mva	10	%
$m vb$	0	%
$m vc$	100	%
$m vd$	15	%

mve	0	%
mvf	100	%
S	100	cm^2
k	0.9375	$l/(min * Volt)$
g	9.81	m/s^2
f_1	100/6	—
f_2	10	—

Fuente: Elaboración propia

Como ya se mencionó en el apartado 2.2.4, éstos son los parámetros reales del módulo con los que se realizará el control real; en la figura 29 se muestra la gráfica del comportamiento de los niveles. En este experiment el tanque N°2 alcanza mayor altura respecto a los otros tres, para el tiempo de simulación de $t = 400$ s se llega al estacionario, listo para poder ser controlado.

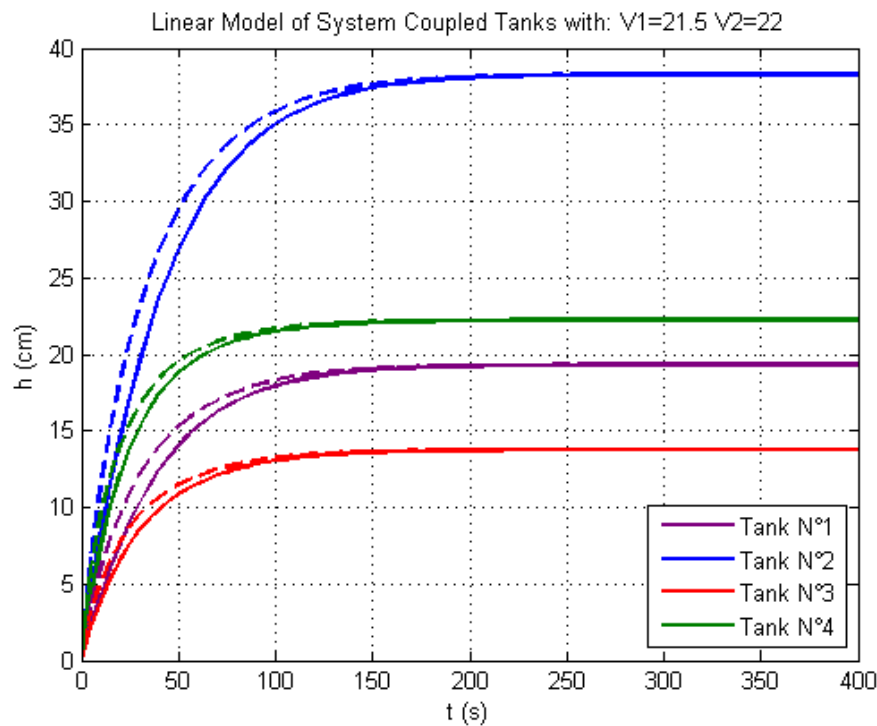


Figura 28. Comportamiento del Modelo no lineal y el Modelo lineal para la Simulación N°2

Fuente: Elaboración propia

De igual manera que en la Simulación N°1, las líneas continuas representan al modelo linealizado, y las líneas discontinuas al modelo no lineal.

Otro aspecto importante es señalar que la simulación empieza desde la puesta en marcha, sin embargo, si se partieran de distintas condiciones iniciales para los niveles de los tanques el resultado sería el mismo, llegando a sus mismos valores de nivel estacionario.

En la figura 29 se muestran los mismos resultados que la figura 28, con la diferencia que se usó la matriz Cs de la ecuación (3.13).

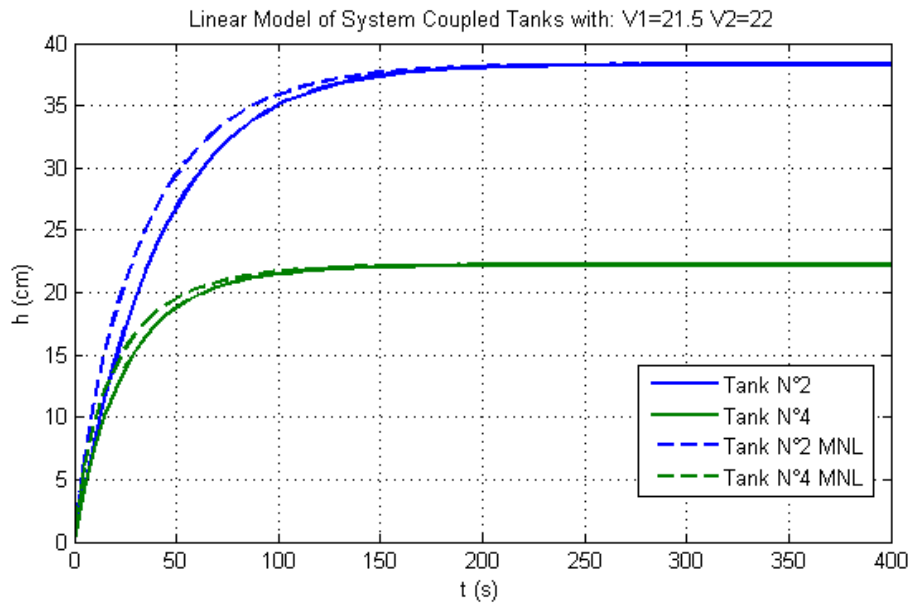


Figura 29. Comparación de modelos para la Simulación N°2 considerando la ecuación (3.13)

Fuente: Elaboración propia

Por lo tanto, el desempeño del modelo lineal es adecuado para tomarlo como base a implementar los algoritmos de control clásico y predictivo y ser extendido al caso multivariable de manera no tan compleja debido a su representación en espacio de estados.

3.3 Identificación de procesos

La identificación es el otro método, a parte de la modelación, mediante el cual se puede obtener un modelo matemático. Se fundamenta en un registro de datos que contengan los valores de las entradas y salidas del sistema, sin importar las leyes que gobiernen la dinámica del sistema, es decir, toma al sistema como si fuera una caja negra. Por ello, los experimentos realizados para el registro de datos desempeñan una tarea fundamental. Habitualmente éste es el método más utilizado para el control de procesos reales, mientras que la modelación es más empleada para estudiar los comportamientos y propiedades de los sistemas.

Así, el método de identificación es empleado al módulo de cuatro tanques acoplados, para que con el modelo obtenido se pueda contrastar el modelo lineal hallado en la ecuación (3.8) y así poder implementar las estrategias de control clásico (PID) y predictivo (MPC).

3.3.1 Metodología de la Identificación

Sabemos que los métodos de identificación adquieren información del proceso a través de la data registrada de entradas y salidas. Y la confiabilidad del modelo obtenido depende de la dinámica con que se haya variado las entradas y por ende, haberse reflejado en las salidas [24].

Por esta razón, en los experimentos realizados para la obtención de la data se debe tener extrema atención.

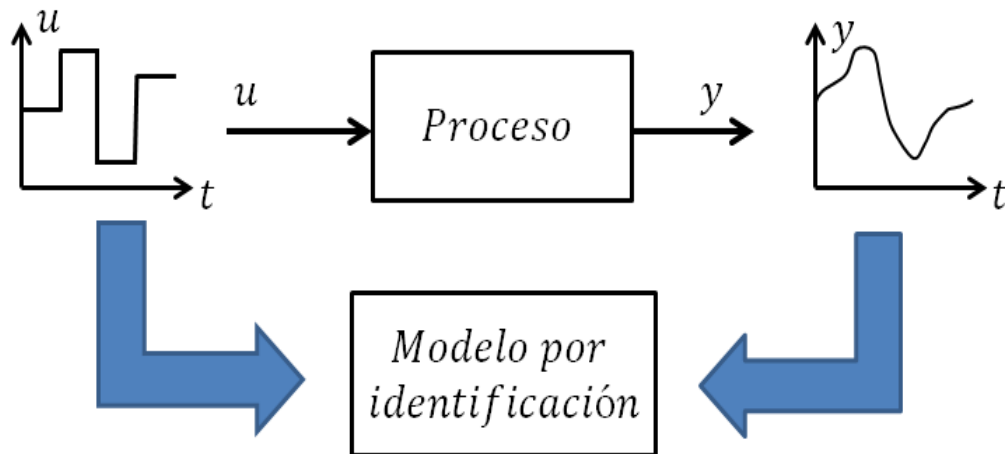


Figura 30. Esquema del proceso de Identificación
 Fuente: Elaboración propia

La ventaja de éste método es que se pueden obtener los modelos de manera rápida y sin conocer a profundidad la funcionalidad del proceso, pero por otra parte, el rango de validez es limitado y solo es factible en un rango de operación que está alrededor del punto de linealización.

Para el desarrollo de la identificación se suelen seguir los siguientes pasos:

1. Planear el experimento, lo más recomendable consiste en establecer unos datos aleatorios para las entradas y luego de ser procesados por el sistema, poder recoger datos de las salidas del proceso.
2. Inspeccionar y arreglar los datos, consiste en filtrar los datos, remover tendencias y sobresaltos.
3. Elegir un tipo de modelo, es decir, un modelo que mediante hipótesis estadísticas se ajuste a los datos experimentales y que nos brinde el mínimo error (ejemplo: N4SID genera un modelo en espacio de estados).
4. Estimar parámetros, consiste en hacer una selección adecuada de parámetros para analizar cuál selección es la que brinde un mejor modelo, es decir, que optimice al modelo generando un mejor ajuste entre los datos de entrada y salida.
5. Validar el modelo obtenido, para ello, es necesario evaluar su respuesta ante saltos escalón e impulsos, así poder determinar posibles defectos y diagnosticar sus causas. Además el índice de performance es un método muy eficaz que se puede utilizar en éste paso.

Estos pasos no son para seguirlos al pie de la regla, de manera unidireccional, sino que se tiene la libertad de volver a cada uno de ellos para hacer modificaciones.

El filtrado de los datos antes de ser analizados es importante porque permite remover algunos datos que son generados por ruidos de alta frecuencia y que no se desea que intervengan en la obtención del modelo obtenido por identificación.

3.3.2 Modelos dinámicos

Los modelos dinámicos nos ofrecen facilidad de manejo, brindan datos cuantitativos de los de las señales de entrada y salida del proceso a lo largo del tiempo y solo debe representar la dinámica en estudio, es decir, no se debe hacer un modelo tan preciso considerando todos los parámetros y variables posibles, sino solo debe representar lo esencial que se necesita.

Otro aspecto importante es tener en cuenta que las perturbaciones ocasionadas por ruidos alteran los datos recopilados, y por eso se deben emplear unos filtros tal como se indicó en la sección anterior.

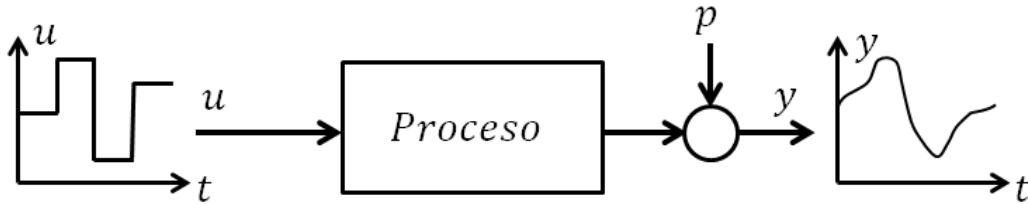


Figura 31. Simbolización de las perturbaciones en la Identificación
Fuente: Elaboración propia

Se debe tener en cuenta que la recopilación de datos es de manera discreta para las entradas y salidas, ya que, el ordenador solo trabaja con datos discretos, sin embargo, las señales que maneja el proceso son continuas. Por ello siempre se emplea un tiempo de muestreo manejable que dependerá del tipo de proceso.

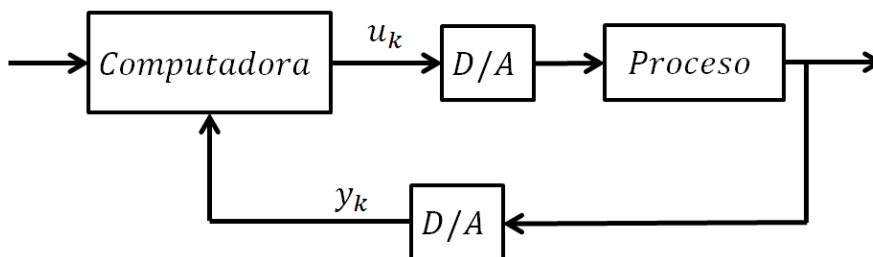


Figura 32. Esquema a lazo cerrado de un proceso
Fuente: Elaboración propia

La figura 32 muestra un diagrama que indica la asignación y recopilación de señales entre una computadora y un proceso, este diagrama es también empleado para implementar un control al proceso, solo que para este caso se utilizará un algoritmo que determine la entrada en función de la salida y estará dentro de la computadora.

Los modelos dinámicos también cumplen con el principio de linealidad donde las salidas actuales dependen de las entradas y salidas en un tiempo de muestreo anterior [24].

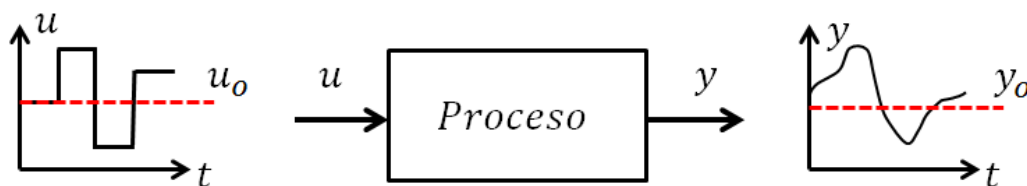


Figura 33. Punto de Linealización de un proceso
Fuente: Elaboración propia

Es por ello que el rango de validez de un modelo lineal está limitado por una zona alrededor del punto de operación al cual fue linealizado.

3.3.3 Algoritmo de identificación a espacio de estados (N4SID)

Este algoritmo de identificación necesita como premisa la dimensión del vector espacio de estados que deseamos para nuestro modelo. Y el algoritmo se encarga de determinar las matrices A, B, C y D del modelo.

$$x_{k+1} = A * x_k + B * u_k \quad (3.14)$$

$$y_k = C * x_k + D * u_k \quad (3.15)$$

Dónde:

u : vector de entradas de dimensión m

y : vector de salidas de dimensión p

x : vector de estados del sistema

Éste conjunto de algoritmos basados en operaciones algebraicas de matrices permite obtener modelos en tiempo continuo y discreto. Los métodos usados para este algoritmo están sustentados en la aproximación geométrica que utiliza la teoría de subespacios [24], así las matrices operaciones entre las matrices permiten relacionar los datos de entrada y salida.

Como punto de partida para los algoritmos sustentados en subespacios se utiliza la ecuación (3.16).

$$Y = Ob * X + H * U \quad (3.16)$$

Dónde:

$$X(k, j) = [x_k \quad x_{k+1} \quad \dots \quad x_{k+j-1}]; \quad Ob(p_i, n) = [C^T \quad (CA)^T \quad \dots \quad (CA^{i-1})^T]$$

$$Y(p_i, j) = \begin{bmatrix} y_k & y_{k+1} & \dots & y_{k+j-1} \\ y_{k+1} & y_{k+2} & \dots & y_{k+j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{k+i-1} & y_{k+i} & \dots & y_{k+i+j-2} \end{bmatrix}; \quad U(m_i, j) = \begin{bmatrix} u_k & u_{k+1} & \dots & u_{k+j-1} \\ u_{k+1} & u_{k+2} & \dots & u_{k+j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{k+i-1} & u_{k+i} & \dots & u_{k+i+j-2} \end{bmatrix}$$

Y y U son matrices de Hankel, construidas a partir de los datos de ingreso y salida, X es la secuencia de datos, Co es la matriz de observabilidad que será estudiada a más detalle en el siguiente capítulo y H es la matriz de Toeplitz construída con los parámetros de Markov del modelo:

$$H(p_i, m_i) = \begin{bmatrix} D & \dots & \dots & \dots \\ CB & D & \dots & \dots \\ CAB & CB & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{i-2}B & CA^{i-3}B & \dots & D \end{bmatrix}$$

Entonces, lo que hace este algoritmo de subespacios es estimar la secuencia de estados de los datos de ingreso y salida. Con la secuencia de estados calculada, las matrices A, B, C y D son obtenidas resolviendo un problema de mínimos cuadrados.

3.3.4 Identificación del Módulo de tanques acoplados

Para determinar un modelo matemático por identificación para el módulo de cuatro tanques acoplados es necesario disponer de un registro de datos del valor de las entradas y salidas, para éste experimento fueron tomados con un tiempo de muestreo $T_s = 5$ s durante una sesión de aproximadamente una hora, se seguirá la metodología de [25].

Las variables consideradas del sistema, como ya se mencionó, son las tensiones aplicadas en las electrobombas $u_1 = 21.5$ V y $u_2 = 22$ V y que una vez que el sistema alcance el estado de equilibrio se varían subiendo y bajando 2 V respecto a su valor inicial. Esta variación es generada por el comando *idinput* de Matlab que se utiliza para generar señales de entrada para procesos de identificación, para este experimento se utilizó una secuencia binaria aleatoria RBS (*random binary sequence*).

Una vez que la data de los valores de entrada se ha ingresado al sistema y se recogió la data de los valores a la salida, como se puede apreciar en las figuras 34 y 35 se puede notar que los valores del punto de funcionamiento son: $u_{10} = 21.5$ V, $u_{20} = 22$ V, $h_{10} = 19.3$ cm, $h_{20} = 38.3$ cm, $h_{30} = 13.7$ cm y $h_{40} = 22.2$ cm.

Este punto de funcionamiento corresponde a los valores del experimento en la muestra $k = 80$, que es lo mismo decir en $t = 400$ s, donde el valor de las entradas se mantuvieron constantes para que el valor de las salidas se estabilicen.

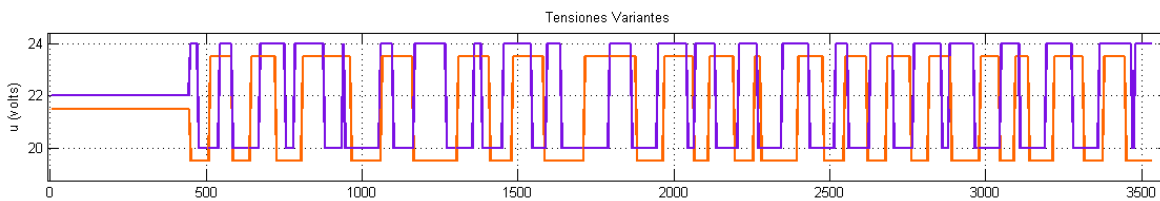


Figura 34. Señal RBS para las tensiones de las electrobombas
Fuente: Elaboración propia

Luego estos valores del punto de funcionamiento son restados a toda la data para tener el registro de datos normalizados y así poder trabajar con las variables Δu_1 , Δu_2 , Δh_1 , Δh_2 , Δh_3 y Δh_4 que son las variaciones de las entradas y salidas del sistema.

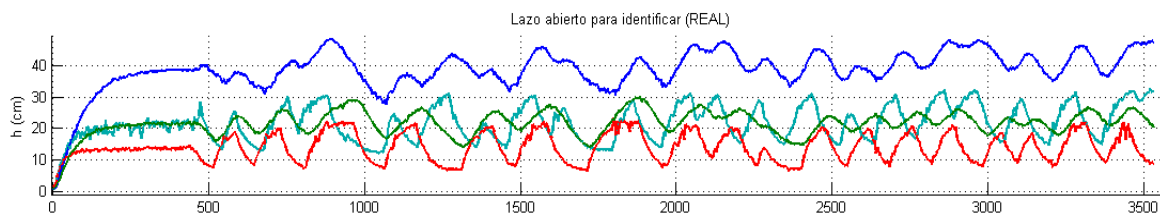


Figura 35. Señal de la salida del sistema para Identificación
Fuente: Elaboración propia

Una vez que ya se tiene la nueva data normalizada, se procede a ingresar en el *toolbox* de Matlab llamado “*ident*”, es una interfaz gráfica para identificación.

Primero se cargan los datos mediante la opción “*Import data* → *Time domain data*” y observaremos el formulario que aparece en la figura 36, si en este formulario presionamos el botón “*more*” podemos incluir información adicional como los nombres de las variables y unidades. Mediante el botón “*import*” podemos cargar los datos y serán mostrados en “*Data Views*”, también como datos disponibles para iniciar el trabajo en “*Working Data*”, y por último también como datos para validación en “*Validation Data*”.

Figura 36. Formulario de Import data

En la parte inferior izquierda del formulario *System Identification Tool*, se puede habilitar el botón “*Time plot*” genera una gráfica donde a través del menú “*Channel*” se puede relacionar convenientemente la parejas de entradas y salidas que se desea observar, siempre y cuando se tenga el registro de sus datos en “*Data views*” tal como se muestra en la figura 37.

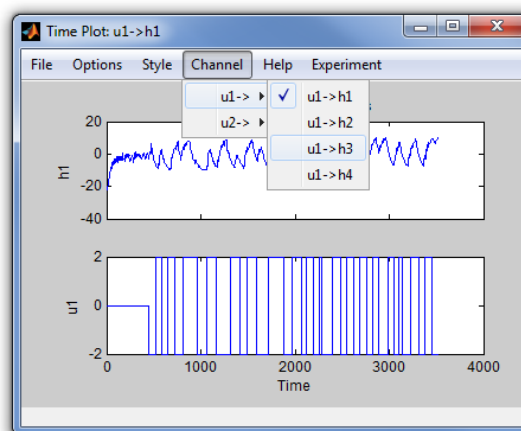


Figura 37. Gráficas de entradas versus salidas

Ahora debemos procesar los datos, eso quiere decir que debemos seleccionar una parte del registro de datos para trabajar el modelo de identificación y otra parte para validar el

modelo, esto se muestra en la figura 38, ingresando a la opción “*Preprocess* → *Select range*” de la ventana *System Identification Tool*.

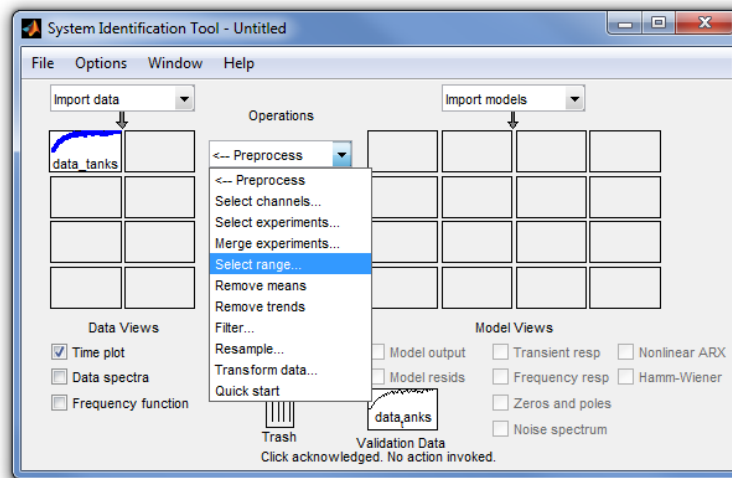


Figura 38. Ventana principal del toolbox "ident"

Dentro de la ventana “*Select range*” se procede a seleccionar los datos para trabajar el modelo que los llamaremos “*data_trabajo*” y lo cargamos con el botón “*Insert*”; de manera semejante seleccionamos la data para validación del modelo y la nombramos “*data_validacion*”, como se muestra en la figura 39. Los nuevos conjuntos de datos formados serán mostrados en “*Data views*” y deberán ser ubicados en las casillas de “*Working Data*” y “*Validation Data*” respectivamente.

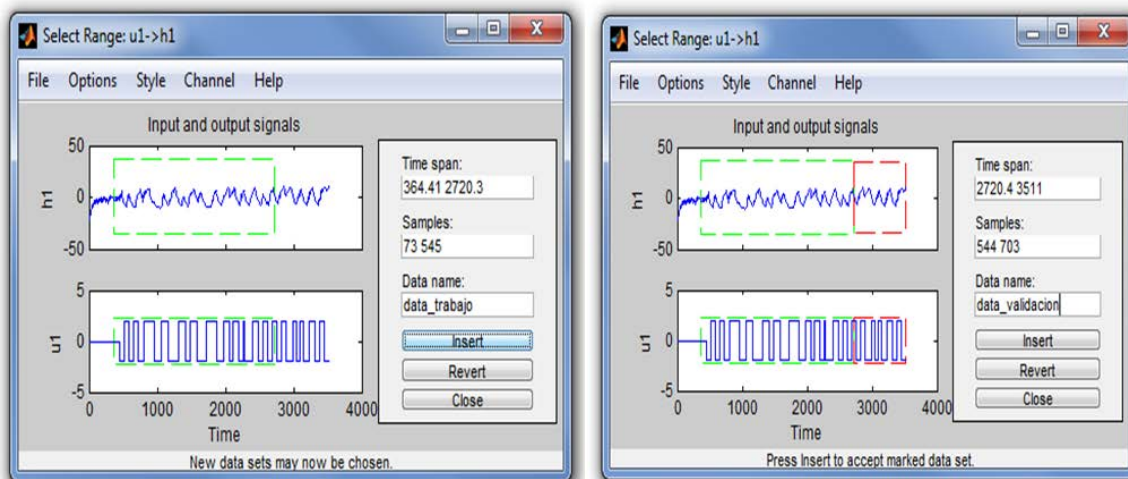


Figura 39. Selección de rangos para generar y validar el modelo

Ahora, con toda la data lista ya podemos empezar a estimar modelos, con la opción “*Estimate*” que brinda diferentes estructuras, entre ellas tenemos ARX, ARMAX, “*State Space*”, “*Transfer Function*”, etc. Luego de elegir un tipo de estructura pasamos a definir los parámetros adecuados para el modelo, como el orden del modelo, el nombre y otros más que son propios de cada estructura.

Para el módulo de cuatro tanques se probaron con nueve estructuras y los modelos obtenidos se muestran en “*Model views*”, modelos de regresión, espacios de estados, no

lineales, y son algunos discretos y otros continuos, todos estos modelos se muestran en la figura 40.

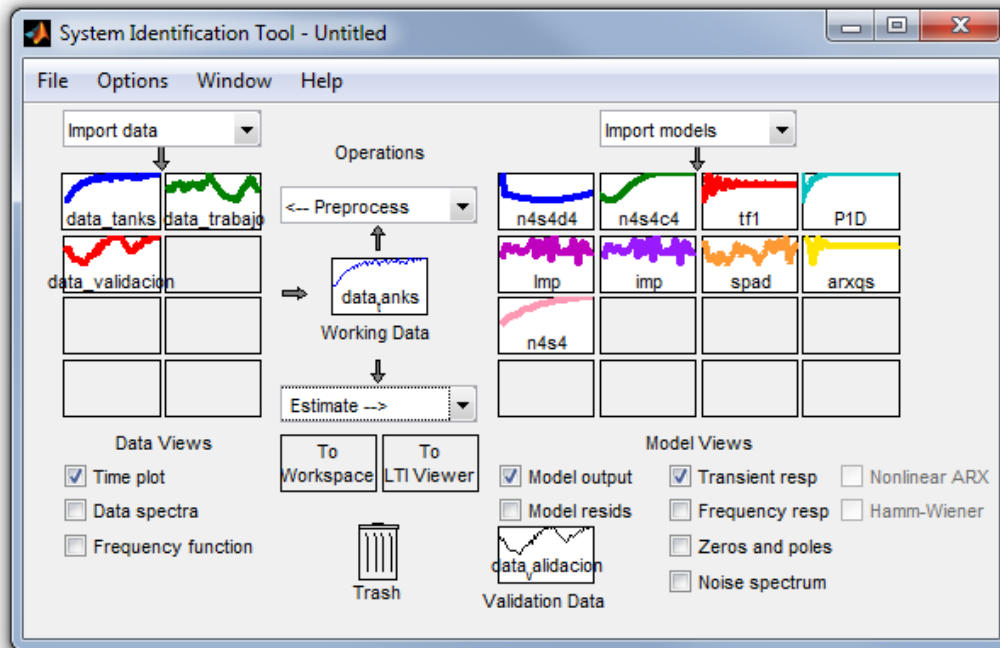


Figura 40. Modelos obtenidos por Identificación

La ventana “*Model output*” que se muestra en la figura 41 muestra los modelos validados y cada uno tiene un número de *fit* relacionado que indica el grado de encaje que tiene el modelo con el proceso real.

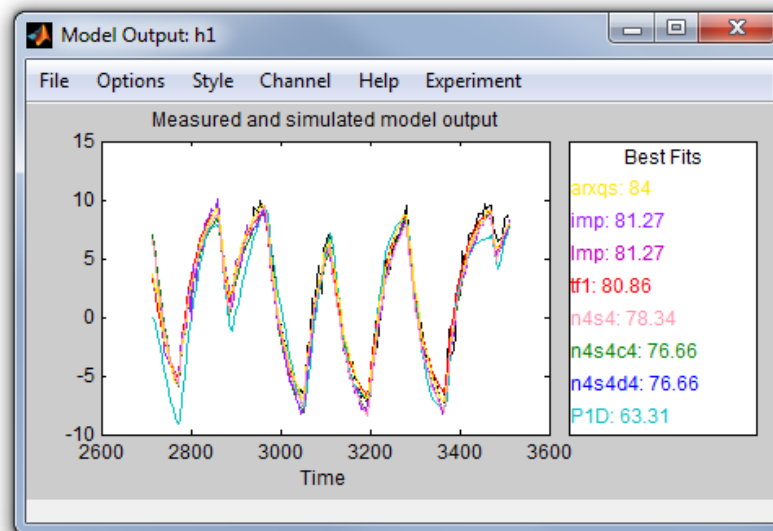


Figura 41. Ventana con el *fit* de los modelos

Para nuestro experimento se utilizó el algoritmo de identificación *N4SID*, eligiendo la forma canónica y con cuatro estados en la configuración de sus parámetros, de este modo obtuvimos dos modelos, uno en discreto para el algoritmo del control MPC y otro en continuo para el diseño del controlador PID, ambos modelos lineales en espacio de estados tienen un *fit* de 76.66 %, tal como se puede apreciar en la figura 41.

3.4 Verificación y ajuste del modelo lineal

El interés evidente frente a los diseñadores y usuarios de los modelos matemáticos es el grado de confianza en las predicciones del modelo. Usualmente, los errores más comunes se cometen en la estimación de los parámetros, en las suposiciones que se hacen al inicio del modelado y hasta a veces en la programación. La verificación tiene como fin tratar este asunto y se ha convertido en una parte importante del tratamiento para ajustar y afinar el modelo.

En la figura 42 se aprecia el comportamiento de las electrobombas en una ventana de tiempo que va desde $t = 400$ s hasta $t = 1000$ s. Los valores de las tensiones aplicadas en las electrobombas desde $t = 0$ hasta que el sistema se estabiliza son $u_1 = 21.5$ V y $u_2 = 22$ V, luego se varían ambas tensiones de manera aleatoria e independientemente para observar la semejanza y diferencias entre los modelos que se analizan.

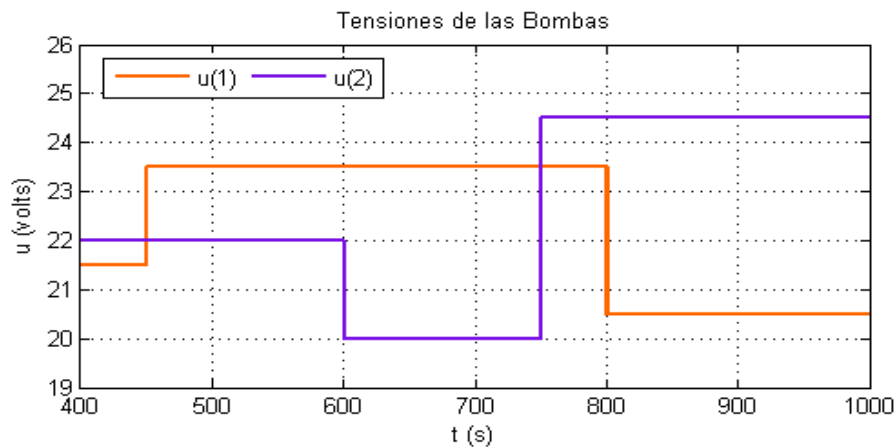


Figura 42. Manipulación de la tensión en las Electrobombas
Fuente: Elaboración propia

En la figura 43 se observa el nivel de agua en el Tanque N°2 que alcanza una altura de 38.3 cm para ambos modelos en el estacionario ($t = 400$ s), sin embargo, cuando se empieza a manipular la tensión en las electrobombas, ocasionan un desfase en la simulación de ambos modelos.

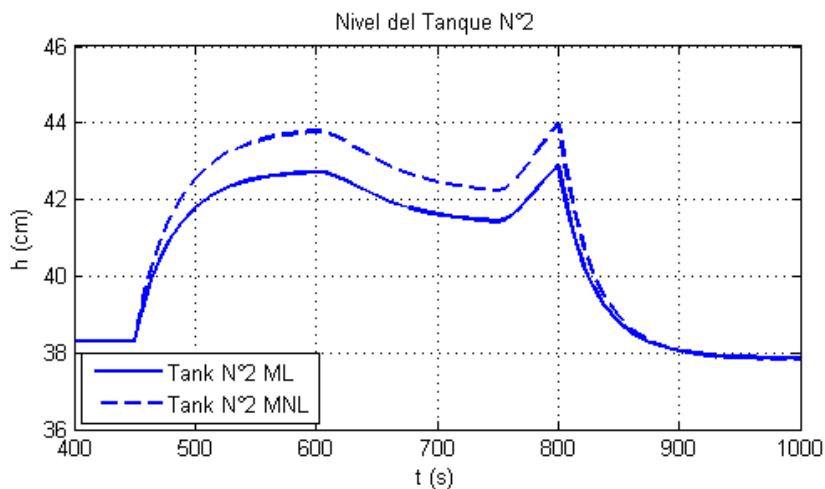


Figura 43. Comportamiento del nivel de agua en el Tanque N°2 del modelo lineal (ML) y el modelo no lineal (MNL) como respuesta a la manipulación de las electrobombas
Fuente: Elaboración propia

De manera similar ocurre en la figura 44 con el nivel del Tanque 4, en el estacionario, ambos modelos llegan a una altura de 22.2 cm aproximadamente, pero cuando la tensión es manipulada alrededor de los valores de operación, el comportamiento de ambos niveles sufre una separación pero la tendencia de los dos sigue siendo la misma.

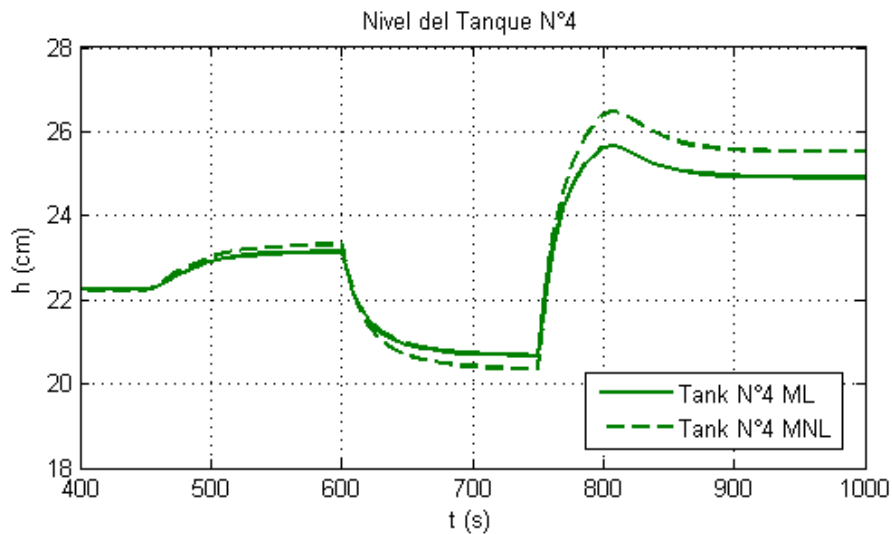


Figura 44. Comportamiento del nivel de agua en el Tanque N°4 del modelo lineal (ML) Y el modelo no lineal como respuesta a la manipulación de las electrobombas

Fuente: Elaboración propia

Por lo tanto, al haber analizado el comportamiento del modelo lineal y el modelo no lineal ante variaciones aleatorias en la entrada del sistema, se concluye que el modelo lineal es una buena aproximación al comportamiento del proceso y las pequeñas diferencias que se tiene con respecto al modelo no lineal depende principalmente de que el modelo lineal solo es aplicable en la zona cercana al punto de linealización.

Capítulo 4

Conceptos y estrategias de control multivariable

Como bien sabemos, la mayoría de los procesos industriales son sistemas multivariables, por lo tanto, al implementar un sistema de control la principal dificultad es subsanar la actividad de las interacciones. En éste capítulo se estudiarán las interacciones para una adecuada selección de las variables, también se verá dos estrategias de control lineal, es decir, diseñadas en base a un modelo linealizado, para control alrededor del punto de operación del proceso. La primera estrategia es un control clásico PID, usado por más de seis décadas en la industria y que ha brindado aceptables resultados; mientras que la segunda es una estrategia de control predictivo basado en modelo (*Model Predictive Control*), que cuenta con algoritmos de optimización y su campo hoy en día sigue en investigación.

4.1 Observabilidad y Controlabilidad del sistema

Los conceptos de observabilidad y controlabilidad fueron enunciados por Rudolf Kalman en 1960, y son fundamentales para determinar si es posible o no implementar un sistema de control completo. Para ello, se hace uso de técnicas matriciales de un modelo en espacio de estados.

Tener en cuenta que al trabajar con sistemas físicos (como el de esta tesis), tienden a ser controlables y observables, sin embargo, el modelo matemático puede no presentar dichas propiedades, en estos casos es necesario analizar bajo qué condiciones el sistema es controlable y observable [26].

Consideramos el sistema lineal estacionario analizado en el apartado 3.2.1 por las ecuaciones (3.9) y (3.10)

$$\dot{x}(t) = As(t) * x(t) + Bs(t) * u(t) \quad (3.9)$$

$$y(t) = Cs(t) * x(t) + Ds(t) * u(t) \quad (3.10)$$

A continuación estudiaremos estos conceptos para luego decidir la posibilidad de diseñar un sistema de control para el módulo de cuatro tanques.

4.1.1 Controlabilidad

La concepción de controlabilidad detalla la interacción que hay entre las entradas y las variables de estado de un sistema, es decir, señala si el comportamiento de un sistema puede ser controlado mediante sus entradas. Si todos los estados son controlables, entonces el sistema es completamente controlable.

Por lo tanto, un sistema es controlable si manipulando una entrada es posible llevar un estado de una condición inicial a otra condición final en un tiempo finito, sin importar la trayectoria seguida.

La matriz de controlabilidad es:

$$Co = [Bs \quad As * Bs \quad As^2 * Bs \quad \dots \quad As^{n-1} * Bs], \quad Co \in \mathbb{R}^{n \times np}, \quad (4.1)$$

La controlabilidad es una propiedad de un sistema que es invariante respecto a transformaciones de equivalencia algebraicas.

Ejemplo. Analizar la estabilidad y controlabilidad del siguiente sistema:

$$As = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}; \quad Bs = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad Cs = [0 \quad 1]$$

- Analicemos la estabilidad $\det(s * I - As) = 0$, entonces:

$$\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s-1 & -1 \\ -1 & s-4 \end{bmatrix} = (s^2 - 5s + 4) - 1 = 0$$

$$s^2 - 5s + 3 = 0$$

La solución del polinomio de segundo orden son los polos 4.3 y 0.69, ambos positivos, por lo tanto el sistema a lazo abierto es inestable.

- Analicemos la matriz de controlabilidad que tendrá la siguiente forma:

$$Co = [Bs \quad As * Bs] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

El rango de ésta matriz es a simple vista de valor 2, igual a su dimensión, por lo tanto el sistema es completamente controlable.

4.1.2 Observabilidad

La concepción de observabilidad explica la interacción que existe entre las salidas y las variables internas de un sistema, es decir, nos señala si el comportamiento interno de un sistema puede ser revelado mediante las variables de salida.

Por lo tanto, un sistema es observable si el vector de estados se puede determinar a partir del vector de salidas en un tiempo finito.

La ecuación (4.2) muestra la matriz de observabilidad.

$$Ob = \begin{bmatrix} Cs \\ Cs * As \\ Cs * As^2 \\ \vdots \\ Cs * As^{n-1} \end{bmatrix}, \quad Ob \in \mathbb{R}^{nq \times n}, \quad (4.2)$$

Este concepto es muy importante porque gracias a esto se puede diseñar “estimadores de estados” que vienen a ser algoritmos que determinan el valor de los estados midiendo las salidas; por ello se necesitaría invertir en una menor cantidad de sensores para registrar la data de todas las variables de interés.

Ejemplo. Analizar la observabilidad del siguiente sistema:

$$As = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -4 \end{bmatrix}; \quad Bs = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad Cs = [1 \quad 0 \quad 1]$$

- La matriz de observabilidad del sistema es la siguiente

$$Ob = \begin{bmatrix} Cs \\ Cs * As \\ Cs * As^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & -5 & 16 \\ 1 & -4 & 11 \end{bmatrix}$$

La cual tiene rango 3, por lo tanto el sistema es completamente observable.

4.2 Control PID

Es un sistema de control muy utilizado en las industrias, consiste en un lazo cerrado que le resta la señal de salida del sistema al valor de referencia o *setpoint*, esta diferencia es llamada error y es la entrada al controlador, mientras que su salida es dirigida hacia un actuador para entrar al proceso, teniendo como objetivo reducir al máximo el error.

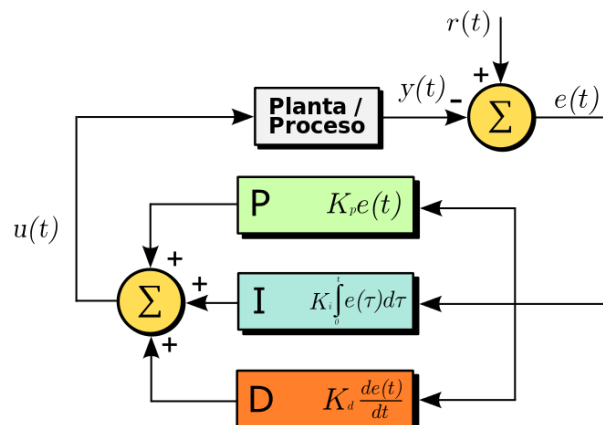


Figura 45. Diagrama de bloques de un controlador PID

Fuente: Wikipedia

El PID está determinado por tres parámetros que son el proporcional, integral y el derivativo. La acción proporcional depende de los errores actuales, la acción integral de los errores pasados y la acción derivativa es una predicción de los errores futuros (Ver figura 45). Cada uno de sus parámetros influye en alguna característica de la salida del proceso, como por ejemplo el tiempo de establecimiento y la sobreoscilación que pueda presentarse.

Sintonizando adecuadamente los tres parámetros del PID se puede controlar la salida de acuerdo a los requerimientos de un proceso en específico. Antes de sintonizar el PID es necesario hacer un estudio de las medidas de interacción para los casos de sistemas multivariables.

4.2.1 Medidas de interacción

En sistemas multivariables la interacción entre variables es el efecto más importante en el diseño y sintonización de lazos de control. Se dice que un proceso presenta interacción cuando una variable de entrada afecta a más de una variable de salida. Afecta quiere decir que la variable controlada se aleja de su referencia en virtud de cambios en la variable de entrada.

Digamos que se tiene la matriz de transferencia (4.3) que representa a un sistema multivariable de dos entradas y dos salidas.

$$T(s) = \begin{bmatrix} T_{11}(s) & T_{12}(s) \\ T_{21}(s) & T_{22}(s) \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

Descomponiendo, se muestra el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} y_1(s) &= T_{11}(s)u_1(s) + T_{12}(s)u_2(s) \\ y_2(s) &= T_{21}(s)u_1(s) + T_{22}(s)u_2(s) \end{aligned} \quad (4.4)$$

Tiene por entradas a (u_1, u_2) y como salidas (y_1, y_2) ; el sistema lineal está en el campo de Laplace y se utilizará para analizar las medidas de interacción y así poder sacar conclusiones a cerca del grado de dificultad para implementar un sistema de control clásico alrededor del punto de operación.

4.2.1.1 Numero de Condición

El número de condición, generalmente llamado *condition number* (CN), es una medida de sensibilidad en función de los cambios en la entrada de un sistema y se calcula a partir de la geometría de la matriz de transferencia como lo muestra la ecuación (4.5).

$$CN(T) = \frac{\bar{\sigma}(T)}{\underline{\sigma}(T)} \quad (4.5)$$

Dónde:

$$\bar{\sigma}(T) = \max\{\sqrt{\lambda_i[T(0)^H T(0)]}\}$$

$$\underline{\sigma}(T) = \min\{\sqrt{\lambda_i[T(0)^H T(0)]}\}$$

$T(0)$: Es la matriz de ganancias estáticas del sistema MIMO $T(s)$.

λ_i : Autovalores de la matriz $[T(0)^H T(0)]$

Si el *condition number* es bajo, se dice que el sistema está bien acondicionado, el valor límite recomendado es 10. Sin embargo, un *condition number* grande indica que el sistema está mal condicionado, esto significa que hay entradas que afectan fuertemente en la salida, mientras que otras entradas apenas las afectan [27].

4.2.1.2 Matriz de Ganancias Relativas

La matriz de ganancias relativas o también llamada *relative gain array* (RGA) es una medida muy importante para la selección de los pares entrada-salida para controlar un sistema multivariable escogiendo la mínima interacción en estado estacionario.

La ganancia relativa entre dos variables está dada por:

$$\lambda_{ij} = \frac{\left. \frac{\partial y_i}{\partial u_j} \right|_{u=cte}}{\left. \frac{\partial y_i}{\partial u_j} \right|_{y=cte}}$$

Construyendo la matriz de ganancias relativas para el sistema de 2x2:

$$RGA[T(0)] = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Particularmente para un sistema de 2x2, λ_{11} resulta igual a λ_{22} y como se sabe cada columna o fila de la matriz debe sumar la unidad, por lo tanto la ecuación (4.6) se altera y se llega a la expresión de la ecuación (4.7).

$$RGA[T(0)] = \begin{bmatrix} \lambda & 1 - \lambda \\ 1 - \lambda & \lambda \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

Se analiza λ , si es cercano a la unidad la interacción entre u_1 y y_1 es muy fuerte, mientras que el lazo entre u_1 y y_2 no ejerce gran influencia, y se concluye lo mismo para el análisis de u_2 . Entonces el emparejamiento SISO resultaría ser: $u_1 \rightarrow y_1$, $u_2 \rightarrow y_2$.

Si λ es cercano a cero, sería lo contrario que el caso anterior y el emparejamiento mas razonable sería: $u_1 \rightarrow y_2$, $u_2 \rightarrow y_1$.

Para matrices de transferencia de mayor dimensión el RGA se calcula con la ecuación matricial (4.8).

$$RGA = T(0) \cdot \{[T(0)]^{-1}\}^T \quad (4.8)$$

Para procesos asimétricos, la inversa puede sustituirse por la pseudoinversa.

4.2.1.3 Índice de Niederlinski

El índice de Niederlinski (NI) determina la mejor configuración para un sistema, basado en el análisis de estabilidad. Se define como:

$$NI = \frac{\det[T(0)]}{\prod_{i=1}^n T_{ii}(0)} \quad (4.9)$$

Un valor negativo para NI, cuando están cerrados todos los lazos de control, implica que el sistema será inestable para cualquiera de los valores asignados a los parámetros del controlador.

Con el fin de diseñar un sistema de control descentralizado para un proceso, dada la función de transferencia, el RGA se utiliza para formar las parejas entrada-salida, entonces el objetivo del NI es comprobar la estabilidad del lazo cerrado para el emparejamiento dado por el RGA.

4.2.2 Sintonización por asignación de polos

Sintonizar los parámetros de los PID de un sistema multivariable significa hallar los valores de los parámetros k , T_i y T_d que permitan llevar el sistema a condiciones adecuadas de control. Es importante que estos parámetros sean hallados por métodos coherentes, ya que, si son sintonizados sólo por prueba y error; un lazo mal sintonizado puede generar comportamientos inestables o hasta puede ocasionar altos consumos de energía.

Para ello existen varios métodos entre empíricos y matemáticos cómo las reglas de Ziegler Nichols y Asignación de polos, para esta tesis se utiliza éste último por ser uno de los más certeros.

Digamos que se tiene un proceso de primer orden:

$$T(s) = \frac{kp}{\tau * s + 1} \quad (4.10)$$

Dónde kp es la ganancia estática del proceso a lazo abierto, que se halla ante una entrada escalón unitario; y τ es la constante de tiempo, que viene a ser el tiempo en el que la salida del proceso alcanza el 63% de su valor de establecimiento.

El sistema de los tanques acoplados tiene la dinámica semejante a un proceso de primer orden, por ello solo hace falta dos lazos de PI para sintonizarlo.

$$C(s) = k \left(1 + \frac{1}{T_i * s} \right) \quad (4.11)$$

Se sabe que la ecuación característica de un sistema a lazo cerrado está dada por:

$$Fo = 1 + T(s) * C(s)$$

Entonces, igualamos Fo a cero para hallar los polos que hagan estable al sistema.

$$0 = Fo \quad (4.12)$$

Reemplazamos (4.10) y (4.11) en (4.12), luego simplificamos y reordenamos términos hasta tener la forma de una ecuación polinomial de segundo grado.

$$\begin{aligned} 0 &= 1 + \left(\frac{kp}{\tau * s + 1} \right) * \left(k + \frac{k}{Ti * s} \right) \\ 0 &= 1 + \left(\frac{kp}{\tau * s + 1} \right) * \left(\frac{k * Ti * s + k}{Ti * s} \right) \\ 0 &= (\tau * s + 1) * (Ti * s) + kp * (k * Ti * s + k) \\ 0 &= (Ti * \tau * s^2 + Ti * s) + (kp * k * Ti * s + kp * k) \\ 0 &= s^2 + \left(\frac{1 + k * kp * Ti}{\tau} \right) s + \left(\frac{kp * k}{Ti * \tau} \right) \end{aligned} \quad (4.13)$$

Luego procedemos a asignar dos polos para el sistema a lazo cerrado, estos polos tienen que ser asignados con precaución, una regla empírica recomienda que sean cercanos a la constante de tiempo del sistema τ . Sean los polos p_1 y p_2 , a partir de ellos formamos una ecuación con dos factores.

$$0 = (s + p_1) * (s + p_2)$$

A continuación le damos la forma de un polinomio de segundo orden:

$$0 = s^2 + (p_1 + p_2)s + (p_1 * p_2) \quad (4.14)$$

Procedemos a igualar los términos semejantes de las ecuaciones (4.13) y (4.14) para obtener los parámetros del controlador de forma algebraica.

$$\begin{aligned} k &= \sqrt{\left(\frac{\tau * (p_1 + p_2) - 1}{kp^2} \right) \tau * p_1 * p_2} \\ Ti &= \frac{kp * k}{p_1 * p_2 * \tau} \end{aligned} \quad (4.15)$$

Así, los parámetros del PI están en función de los polos asignados, la constante de tiempo y la ganancia estática.

4.2.3 Configuración Anti-Windup

La teoría de control lineal permite configurar un lazo cerrado de un proceso y así garantizar su estabilidad, sin embargo, también debe considerarse algunos efectos no lineales. Por ejemplo los actuadores tienen limitaciones: un motor tiene una velocidad máxima, una válvula no puede estar abierta mayor al 100% ni más cerrada que el 0%, es por ello que en un sistema de control, la variable manipulada pueda alcanzar los límites operativos del actuador. Cuando esto ocurre el lazo de retroalimentación se rompe y el

sistema actúa como si fuese a lazo abierto porque el actuador permanecerá en su límite de operación independientemente del valor que tome la salida del proceso.

En el caso de un PID, la acción integral puede continuar integrando la señal de error, en consecuencia el término integral puede volverse muy grande. Por lo tanto se requiere que la señal de error tenga un signo opuesto durante un largo tiempo para que el término integral retorne a la normalidad. En consecuencia, esto podría ocasionar grandes transitorios cuando el actuador se satura. Esta teoría de ésta sección se ha estudiado detalladamente en [28].

En la figura 46 se observan tres señales, la de salida, la manipulable y la señal de la acción integral del PID para un sistema de control; se puede apreciar el efecto del *windup* en la señal manipulable (se satura). El cambio inicial del punto de referencia es tan grande que el actuador se satura en su límite superior. El término integral aumenta inicialmente porque el error es positivo; alcanzando su mayor valor en $t = 10$ cuando el error pasa por cero. La variable manipulable permanece saturada en este instante debido al gran valor del término integral y no deja el límite de saturación hasta que el error se hace negativo durante un tiempo suficientemente grande como para permitir a la parte integral pasar a ser negativa.

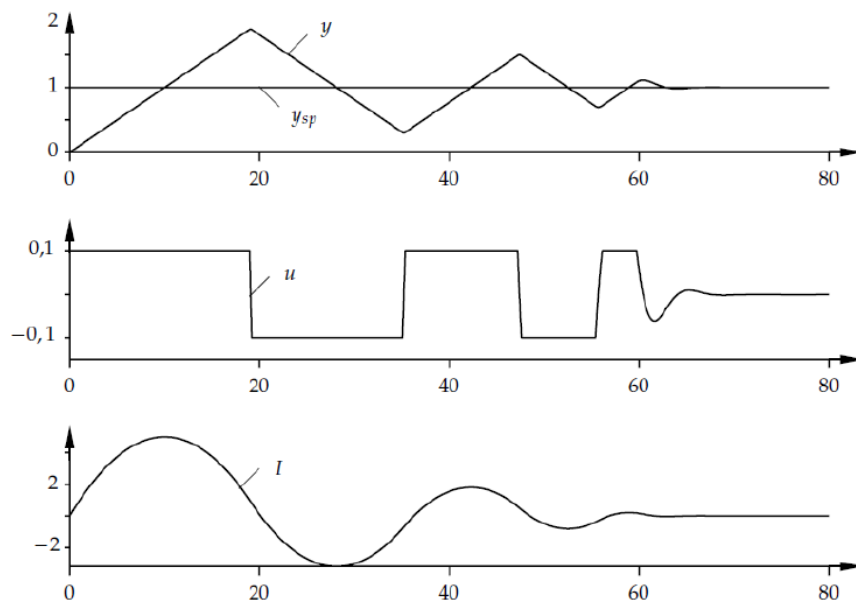


Figura 46. Saturación del integrador
Fuente: Laboratorio de *windup* y *bumples*, [28]

También se observa que la variable manipulable ha rebotado algunas veces entre sus límites de saturación antes de llegar a su valor nominal. El fenómeno de *windup* puede ocurrir también por grandes cambios en la referencia o causados por grandes perturbaciones.

El fenómeno de *windup* puede evitarse, y existen varias formas para hacer que el término integral se mantenga a un valor apropiado cuando el actuador se sature, de modo que el controlador esté listo para reanudar la acción, tan pronto como los cambios de error de control. El método de seguimiento integral es uno de los existentes para remediar esto, y es el que se usará para esta tesis.

4.2.3.1 Seguimiento integral

Este método consiste en hacer un camino de retroalimentación extra en el sistema de control. En la figura 47 muestran la disposición de los bloques para el método del seguimiento integral, esto se genera midiendo la señal que entra al actuador (que se encuentra después del saturador) y formando una diferencia con la salida del controlador ($u - u'$). Dicha señal retroalimenta a la entrada del integrador mediante la ganancia $1/T_a$.

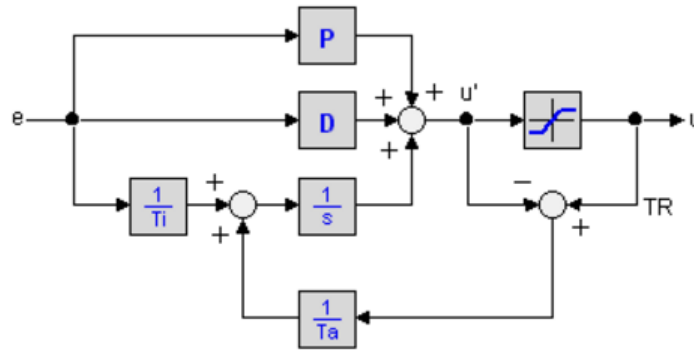


Figura 47. Diagrama de bloques del seguimiento integral
Fuente: Wikipedia

De esta manera no se tendrá problemas sobre el actuador cuando éste no se satura. Cuando el actuador se satura, hay un camino de retroalimentación para el integrador, a causa de esto el término integral disminuye hasta que se haga cero. La entrada al integrador está dada por dos términos:

$$\frac{1}{T_a} e_s + \frac{k}{T_i} e$$

Dónde e es la señal de error que entra al controlador, $e_s = u - u'$, y T_a se puede interpretar como una constante de tiempo, que determina la rapidez de reseteo de la acción integral. Debería ser mayor que T_d pero menor que T_i . Una regla empírica sugerida es la que propone la ecuación (4.16).

$$T_a = \sqrt{T_i * T_d} \quad (4.16)$$

En el capítulo 5 se analizará el desempeño del *antiwindup* en el control de nivel del módulo de cuatro tanques acoplados.

4.3 Control Predictivo Basado en Modelos

En las últimas décadas el control predictivo basado en modelos (MBPC) es una técnica avanzada que ha tenido un impacto significativo en el campo de controladores para la industria. Inicialmente fue usado en procesos químicos y en la refinería de petróleo; hoy en día es usado en el balance de energía para sistemas de utilización.

Entre sus principales ventajas frente al control clásico, según [29] posee una formulación en el dominio temporal; permite tratar con modelos lineales y no lineales, sistemas SISO y MIMO; también tiene en cuenta los valores máximos y mínimos de operación de los actuadores, y permite trabajar en el límite de las restricciones. Así se optimiza la energía consumida y permite reducir costos de operación.

Esta técnica también presenta desventajas, como por ejemplo necesita de un modelo dinámico que tenga un alto índice de confiabilidad, requiere de un ordenador o un dispositivo que pueda realizar la optimización *online*, su aplicación es sobre todo para sistemas lentos, debido al tiempo de cálculo en cada iteración.

Como ya se mencionó, la estrategia de esta técnica es basada en un modelo matemático del proceso a controlar, y de ahí parte para predecir el cambio de las variables de salida al transcurrir un determinado tiempo establecido, llamado horizonte de predicción (H_p), observar los detalles en la figura 48. Así, se pueden calcular las futuras variables manipulables que harán posible que las variables de salida alcancen sus valores de referencia (y_{sp}). Para los incrementos que sufran las variables manipulables (Δu) en cada iteración, el algoritmo establece la condición que cesen después de un tiempo establecido, llamado horizonte de control (H_c).

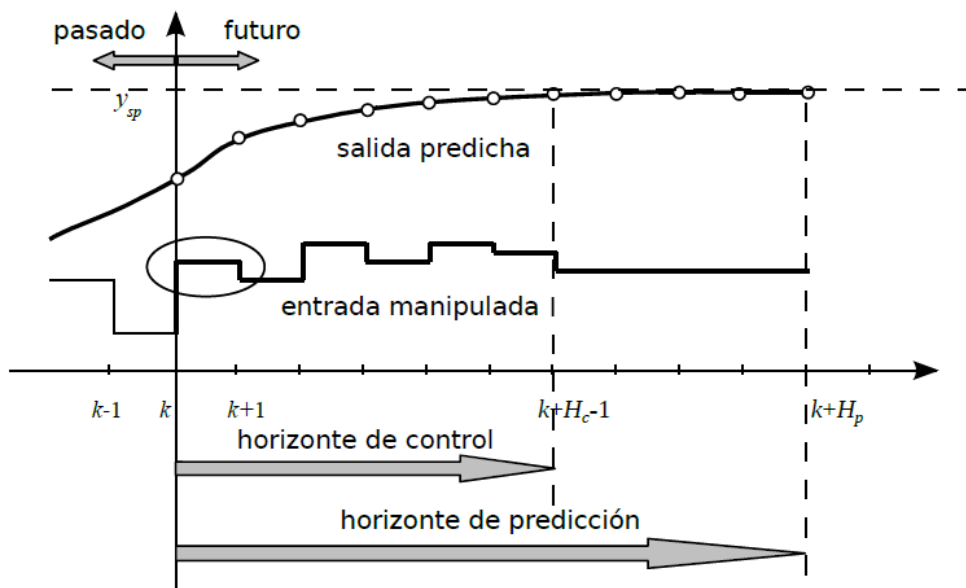


Figura 48. Control predictivo en un sistema SISO
Fuente: *Conceptos básicos de control predictivo*, [29]

Uno de los tantos diseños de controladores predictivos es el “*MPC with state space*” llamado así en inglés, y será el que implementaremos al módulo de cuatro tanques acoplados.

4.3.1 Control MPC con espacio de estados

Esta formulación es muy utilizada para sistemas de múltiples entradas y múltiples salidas presentada en el libro [30]. Se considera un modelo discreto multivariable sin retardos.

Veamos para un modelo discreto con un tiempo de muestreo adecuado en espacio de estados representado por las ecuaciones siguientes.

$$x_m(k+1) = A_m x(k) + B_m u(k) \quad (4.17)$$

$$y(k) = C_m x_m(k) \quad (4.18)$$

Entonces la siguiente ecuación propuesta, es también válida para un periodo de muestreo anterior:

$$x_m(k) = A_m x(k-1) + B_m u(k-1) \quad (4.19)$$

Por definición $\Delta x_m(k+1) = x_m(k+1) - x_m(k)$ y $\Delta u(k) = u(k) - u(k-1)$, luego sustrayendo (4.19) de (4.17) lleva a:

$$\Delta x_m(k+1) = A_m \Delta x_m(k) + B_m \Delta u(k) \quad (4.20)$$

Haciendo un análisis análogo en relación a $y(k)$ y usando la variable $\Delta x_m(k+1)$ se deduce que:

$$\Delta y(k+1) = C_m \Delta x_m(k+1) = C_m A_m \Delta x_m(k) + C_m B_m \Delta u(k)$$

Dónde $\Delta y(k+1) = y(k+1) - y(k)$, entonces:

$$y(k+1) = C_m A_m \Delta x_m(k) + C_m B_m \Delta u(k) + y(k) \quad (4.21)$$

El diagrama mostrado en la figura 49 muestra la secuencia del algoritmo de control MPC. El bloque “Sistema” es el proceso a controlar y los elementos que irán dentro de los bloques “Observador” y “Optimizador” son descritos en los siguientes apartados.

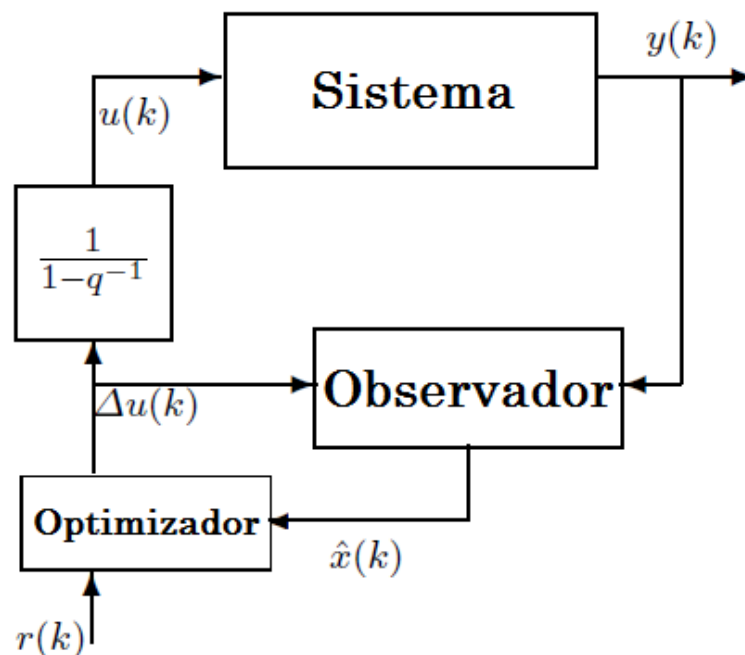


Figura 49. Diagrama del *State Estimate Predictive Control*
Fuente: Elaboración propia

4.3.1.1 Sistema Incrementado

Observando las ecuaciones (4.20) y (4.21), se elige un nuevo vector de estados para formar otro sistema, de la siguiente manera: sea $x(k) = [\Delta x_m(k) \quad y(k)]^T$. Así, las ecuaciones (4.22) y (4.23) describen el nuevo sistema incrementado:

$$x(k+1) = Ax(k) + B\Delta u(k) \quad (4.22)$$

$$y(k) = Cx(k) \quad (4.23)$$

Dónde:

$$A = \begin{bmatrix} A_m & 0_m^T \\ C_m A_m & I_{q \times q} \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} B_m \\ C_m B_m \end{bmatrix}; \quad C = [0_m \quad I_{q \times q}]$$

Además, $I_{q \times q}$ es la matriz identidad con dimensiones $q \times q$, que viene a ser el número de salidas; y 0_m es una matriz de ceros de $q \times n$. Y se tiene entendido que las dimensiones de las matrices A_m , B_m y C_m son $n \times n$, $n \times p$ y $q \times n$, respectivamente.

Es importante analizar los criterios de controlabilidad y observabilidad en el modelo de espacio de estados aumentado, para que el diseño del sistema de control no se convierta inestable por las dinámicas del sistema.

Para dar solución al control predictivo para sistemas MIMO se definen los vectores Y y ΔU como:

$$Y = [y(k_i + 1|k_i)^T \quad y(k_i + 2|k_i)^T \quad \cdots \quad y(k_i + Np|k_i)^T]^T$$

$$\Delta U = [\Delta u(k_i)^T \quad \Delta u(k_i + 1)^T \quad \cdots \quad \Delta u(k_i + Nc - 1)^T]^T$$

Nc y Np son los horizontes de control y predicción respectivamente.

Basándonos en el modelo de espacio de estados (A, B, C) , las futuras variables de estado son calculadas secuencialmente

$$\begin{aligned} x(k_i + 1 | k_i) &= Ax(k_i) + B\Delta u(k_i) \\ x(k_i + 2 | k_i) &= Ax(k_i + 1 | k_i) + B\Delta u(k_i + 1) \\ x(k_i + 3 | k_i) &= A^2x(k_i) + AB\Delta u(k_i) + B\Delta u(k_i + 1) \\ &\vdots \\ x(k_i + Np | k_i) &= A^{Np}x(k_i) + A^{Np-1}B\Delta u(k_i) + A^{Np-2}B\Delta u(k_i + 1) \\ &\quad + A^{Np-3}B\Delta u(k_i + 2) + \cdots + A^{Np-Nc}B\Delta u(k_i + Nc - 1) \end{aligned}$$

La predicción de las variables de estado y las variables de salida son calculadas como los valores esperados de las respectivas variables. Para simplificar la notación se agrupa.

$$Y = F \cdot x(k_i) + \phi \Delta U \quad (4.24)$$

Dónde:

$$F = \begin{bmatrix} CA^T \\ CA^2 \\ CA^3 \\ \vdots \\ CA^{Np} \end{bmatrix}; \quad \phi = \begin{bmatrix} CB & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ CAB & CB & 0 & \cdots & 0 \\ CA^2B & CAB & CB & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ CA^{Np-1}B & CA^{Np-2}B & CA^{Np-3}B & \cdots & CA^{Np-Nc}B \end{bmatrix}$$

Los cálculos realizados y matrices halladas en éste apartado pasan a formar parte del bloque “Optimizador” del diagrama del control MPC en la figura 49.

4.3.1.2 Estimación de estados

En el diseño del modelo predictivo de control, asumimos que la información de $x(k_i)$ es disponible todo el tiempo. Esto significa asumir que todas las variables de estado son medibles. Sin embargo, en muchas aplicaciones reales, muchas de ellas son imposibles de medir. Es por ello que haremos uso de un observador, que ha sido ampliamente usado en varios campos de la ingeniería.

Esencialmente la variable de estado $x(k_i)$ es estimada mediante un observador de la forma:

$$\hat{x}(k_i + 1) = A\hat{x}(k_i) + B\Delta u(k_i) + K_{ob}(y(k_i) - C\hat{x}(k_i)) \quad (4.25)$$

Para hallar la matriz K_{ob} , definimos $e_x(k_i) = x(k_i) - \hat{x}(k_i)$ y sustraemos (4.25) de (4.22), luego reemplazamos la ecuación (4.23) donde corresponda y reduciendo términos se obtiene:

$$e_x(k_i + 1) = (A - K_{ob}C)e_x(k_i) \quad (4.26)$$

Este nuevo sistema tiene que ser estable, por lo tanto, resolviendo la ecuación (4.25) se obtiene el valor de K_{ob}

$$\det(zI - (A - K_{ob}C)) = 0 \quad (4.27)$$

De esta manera, en la figura 50 se muestra las entradas y salidas del bloque “Observador”, que es la representación gráfica de la ecuación (4.25).

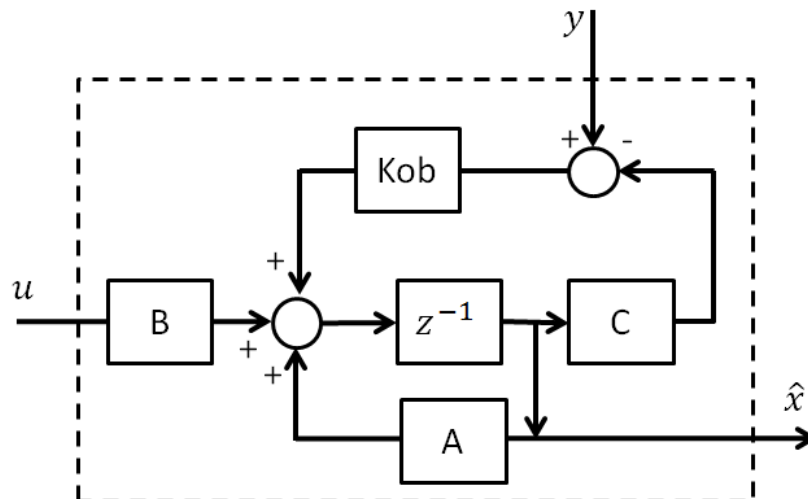


Figura 50. Observador en tiempo discreto
Fuente: Elaboración propia

Teniendo presente que en la implementación del control predictivo usando un observador, la señal de control es $\Delta u(k_i)$. Con la información de $\hat{x}(k_i)$ reemplazando a $x(k_i)$, la ley del control MPC con espacio de estados para encontrar el ΔU óptimo es minimizando la siguiente función de costo:

$$J = (R_s - F\hat{x}(k_i))^T (\bar{R}_s r(k_i) - F\hat{x}(k_i)) - 2\Delta U^T (R_s - F\hat{x}(k_i)) + \Delta U^T (\Phi^T \Phi + \bar{R}) \Delta U \quad (4.28)$$

Dónde R_s es el vector de referencias futuras y \bar{R} es la matriz diagonal de pesos que regula la inversión entre la calidad del control y el consumo de energía. La solución al optimizar ésta función de costo es analítica, pero en el caso que esté sujeta a restricciones, la solución se obtiene mediante Programación cuadrática en línea.

4.3.2 Restricciones

La implementación de restricciones es para que las variables manipulables presenten un adecuado comportamiento sin sobrepasar sus límites físicos ni realizar cambios bruscos provocando que disminuya su tiempo de vida. También permite limitar la señal de salida dentro de una banda para cumplir con estándares de calidad.

Las matrices de restricciones se obtuvieron de acuerdo al libro [30] y se utilizó el método de programación cuadrática para minimizar la función de costo. Para esto se lleva la ecuación (4.28) a la forma:

$$J = \frac{1}{2} x^T H x + x^T b + c \quad (4.29)$$

Dónde $x = \Delta U$; $H = 2(\Phi^T \Phi + \bar{R})$; $b = 2\Phi^T (F\hat{x}(k_i) - R_s)$

Es importante tener en cuenta que el término c de la ecuación (4.29) no interviene en el método de optimización, por eso no es tomado en cuenta. Otro detalle, es que en el caso de no existir restricciones. La solución óptima está dada por:

$$\Delta U = -H^{-1}b \quad (4.30)$$

4.3.2.1 Restricciones en la amplitud de control

La amplitud de la señal de control $u(k)$ es un objeto importante para imponer restricciones. Hay dos formas de implementar esta restricción, la primera consiste en imponer restricciones solo en la primera muestra del vector de señal de control y la segunda impone restricciones en todos los elementos de la señal de control.

Se sabe que $u(k) = u(k-1) + \Delta u(k)$, entonces podemos hacer un cálculo secuencial:

$$\begin{aligned} u(k) &= u(k-1) + \Delta u(k) \\ u(k+1) &= u(k-1) + \Delta u(k) + \Delta u(k+1) \\ u(k+2) &= u(k-1) + \Delta u(k) + \Delta u(k+1) + \Delta u(k+2) \\ &\vdots \\ u(k+Nc-1) &= u(k-1) + \Delta u(k) + \Delta u(k+1) + \dots + \Delta u(k+Nc-1) \end{aligned}$$

Ordenando de manera matricial, se tiene:

$$\begin{bmatrix} u(k) \\ u(k+1) \\ u(k+2) \\ \vdots \\ u(k+Nc-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u(k-1) + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u(k) \\ \Delta u(k+1) \\ \Delta u(k+2) \\ \vdots \\ \Delta u(k+Nc-1) \end{bmatrix}$$

Para el caso multivariable, si $u(k) = [u_1(k) \ u_2(k)]^T$ el arreglo matricial se verá alterado ligeramente:

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} u_1(k+1) \\ u_2(k+1) \end{bmatrix} \\ \vdots \\ \begin{bmatrix} u_1(k+Nc-1) \\ u_2(k+Nc-1) \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m \\ I_m \\ \vdots \\ I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k-1) \\ u_2(k-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_p & 0 & 0 & \dots & 0 \\ I_p & I_p & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ I_p & I_p & I_p & \dots & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u_1(k) \\ \Delta u_2(k) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \Delta u_1(k+1) \\ \Delta u_2(k+1) \end{bmatrix} \\ \vdots \\ \begin{bmatrix} \Delta u_1(k+Nc-1) \\ \Delta u_2(k+Nc-1) \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Para simplificar la notación, asignamos nombres a las matrices y tenemos

$$U = C_1 u(k-1) + C_2 \Delta U \quad (4.31)$$

Dónde U y ΔU son de dimensión $(p \cdot Nc) \times 1$, C_1 es de dimensión $(p \cdot Nc) \times p$, $u(k-1)$ de $p \times 1$ y C_2 de $(p \cdot Nc) \times (p \cdot Nc)$.

Cuando tenemos un \bar{u}_{min} y un \bar{u}_{max} se hace el siguiente procedimiento:

$$\begin{aligned} \bar{u}_{min} &\leq u(k) \leq \bar{u}_{max} \\ C_1 \bar{u}_{min} &\leq U \leq C_1 \bar{u}_{max} \\ \bar{U}_{min} &\leq C_1 u(k-1) + C_2 \Delta U \leq \bar{U}_{max} \\ \begin{bmatrix} C_2 \\ C_2 \end{bmatrix} \Delta U &\leq \begin{bmatrix} -\bar{U}_{min} + C_1 u(k-1) \\ \bar{U}_{max} - C_1 u(k-1) \end{bmatrix} \\ M_1 \Delta U &\leq d_1 \end{aligned} \quad (4.32)$$

Así, la inecuación (4.32) puede pasar a formar parte del algoritmo de optimización del control predictivo.

4.3.2.2 Restricciones en la amplitud de tasa de cambio

Es común que las restricciones sean impuestas en ambos, la amplitud y la tasa de cambio de la señal de control, ambas restricciones serán combinadas en el conjunto extendido de inecuaciones lineales.

$$\begin{aligned} \Delta \bar{u}_{min} &\leq \Delta u(k) \leq \Delta \bar{u}_{max} \\ C_1 \Delta \bar{u}_{min} &\leq \Delta U \leq C_1 \Delta \bar{u}_{max} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} I_{m.Nc} \\ I_{m.Nc} \end{bmatrix} \Delta U \leq \begin{bmatrix} -\Delta \bar{U}_{min} \\ \Delta \bar{U}_{max} \end{bmatrix}$$

$$M_2 \Delta U \leq d_2 \quad (4.33)$$

Así, de manera más sencilla y utilizando la matriz C_1 hallada en el apartado anterior, se obtiene la inecuación matricial (4.33).

4.3.2.3 Restricciones en la variable de salida

En esta sección, las restricciones serán impuestas solo en las variables de salida que sean medibles.

$$\begin{aligned} \bar{y}_{min} &\leq y(k) \leq \bar{y}_{max} \\ C_3 \bar{y}_{min} &\leq Y \leq C_3 \Delta \bar{y}_{max} \end{aligned}$$

Dónde $C_3 = [I_q^T \quad I_q^T \quad \dots \quad I_q^T]^T$, y de la ecuación (4.24) se reemplazan términos:

$$\begin{aligned} \bar{Y}_{min} &\leq F \cdot x(k_i) + \phi \Delta U \leq \bar{Y}_{max} \\ \begin{bmatrix} -\phi \\ \phi \end{bmatrix} \Delta U &\leq \begin{bmatrix} -\bar{Y}_{min} + F \cdot x(k_i) \\ \bar{Y}_{max} - F \cdot x(k_i) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$M_3 \Delta U \leq d_3 \quad (4.34)$$

Así, la inecuación (4.34) describe de manera matemática las restricciones para las variables de salida.

Finalmente, agrupando las inecuaciones (4.32), (4.33) y (4.34) por poseer la misma variable en común ΔU , nos queda la inecuación generalizada de las restricciones en la inecuación (4.35).

$$\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} \Delta U \leq \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

$$M \Delta U \leq d \quad (4.35)$$

Se ha tratado las restricciones para un modelo en tiempo discreto. Imponer restricciones en el diseño e implementación del control predictivo en un sistema implica los siguientes pasos:

1. Definir los límites de operación de la planta, considerando límites en las variables de entrada, los incrementos en la tasa de cambio de las variables de entrada y las variables de salida de la planta.
2. Expresar estos límites como parámetros para los mínimos y máximos de u , Δu y y , considerando que el sistema se encuentra en estado estable.

3. Con la parametrización de la futura señal de control, los mínimos y máximos valores pueden ser expresados en forma de inecuaciones con $\Delta u(k_i)$, $\Delta u(k_i + 1)$, ..., $\Delta u(k_i + Nc - 1)$ como las variables.
4. Por ultimo, el problema de optimización con restricciones es resuelto usando programación cuadrática en cada tiempo de muestreo, y así obtener la solución óptima de las variables de decisión.

Tener en cuenta que todos los cálculos matriciales desarrollados en este apartado pasan a integrarse en la solución de la función de costo y en conjunto pasan a formar el bloque “Optimizador” de la figura 49, que es el diagrama de éste controlador.

Capítulo 5

Simulación e Implementación de los algoritmos de control sobre el sistema

En este apartado se presentan los resultados de varias simulaciones realizadas en Matlab de los controladores PID y MPC para el módulo de cuatro tanques acoplados ante cambio de referencias para el nivel y perturbaciones de flujo a la salida de cada tanque.

Analizaremos dos experimentos, que han sido configurados de manera totalmente distinta, es decir, se evaluará el desempeño de los controladores para dos diferentes puntos de trabajo y dimensiones de diseño.

5.1 Experimento de control N°1

Este experimento ha sido estudiado y también motivo para ser publicado en un artículo acerca del modelo matemático y estrategias de control para el mismo, este es: “Modelación y comparación de controladores PID, GPC y MPC con espacio de estados en un Sistema de Tanques Acoplados” expuesto en el Congreso Salesiano de Ciencia, Tecnología e Innovación para la Sociedad. Guayaquil, Ecuador, en Diciembre 2015. Veamos a continuación los detalles.

Los parámetros utilizados son los mismos de las tablas 1 y 2 del apartado 2.2.4.1, para lo cual, las matrices del sistema linealizado en campo continuo son las siguientes.

$$A_s = \begin{bmatrix} -0.0729 & 0.0000 & 0.0562 & 0.0000 \\ 0.0166 & -0.0257 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0562 & 0.0000 & -0.0853 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0290 & -0.0304 \end{bmatrix}; B_s = \begin{bmatrix} 0.0313 & 0.0313 \\ 0.0938 & 0.0000 \\ 0.0313 & 0.0313 \\ 0.0000 & 0.0938 \end{bmatrix};$$
$$C_s = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; D_s = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para implementar un sistema de control al proceso, primero hay que analizar si es controlable y observable total o parcialmente. Analicemos primero la matriz de controlabilidad según la ecuación (4.1).

$$Co = [Bs \quad As * Bs \quad As^2 * Bs \quad As^3 * Bs], \quad Co \in \mathbb{R}^{4 \times (4 \times 2)},$$

Como el sistema lineal tiene cuatro estados y dos entradas, entonces la matriz de controlabilidad es de dimensión 4×8 y los valores de su contenido son los siguientes.

$$Co = \begin{bmatrix} 0.0313 & 0.0313 & -0.0005 & -0.0005 & 0.0000 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0938 & 0.0000 & -0.0019 & 0.0005 & 0.0000 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0313 & 0.0313 & -0.0009 & -0.0009 & 0.0000 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0000 & 0.0938 & 0.0009 & -0.0019 & -0.0001 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$rang(Co) = 4$$

Como el rango de la matriz de controlabilidad resulta igual al número de estados, se infiere que el sistema es completamente controlable. Ahora veamos la matriz de observabilidad de acuerdo a la ecuación (4.2).

$$Ob = \begin{bmatrix} Cs \\ Cs * As \\ Cs * As^2 \\ Cs * As^3 \end{bmatrix}, \quad Ob \in \mathbb{R}^{(4 \times 2) \times 4},$$

La matriz de observabilidad es de dimensión 8×4 debido a los cuatro estados y dos salidas.

$$Ob = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.0166 & -0.0257 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0290 & -0.0304 \\ -0.0016 & 0.0007 & 0.0009 & 0 \\ 0.0016 & 0.0000 & -0.0034 & 0.0009 \\ 0.0002 & 0 & -0.0002 & 0 \\ -0.0003 & 0 & 0.0004 & 0 \end{bmatrix}$$

$$rang(Ob) = 4$$

El rango de la matriz de observabilidad también resulta igual al número de estados del sistema, por lo tanto es un sistema completamente observable.

5.1.1 Diseño del controlador PI N°1

En el proceso del módulo de cuatro tanques acoplados, se nota que el comportamiento del nivel de los tanques sigue una tendencia a parecerse a un sistema de primer orden, sin sobreoscilaciones, por ende, solo es necesario implementar un controlador PI (parte proporcional e integral) para que el sistema pueda seguir las referencias asignadas.

Para el diseño de sistema de control PI, es necesario trabajar con una matriz de transferencia por tratarse de un sistema multivariable, sin embargo, al tener el sistema expresado en espacio de estados debemos hacer una conversión que vemos a continuación.

Cogiendo las ecuaciones (3.9) y (3.10) que representa a un sistema lineal expresado en espacio de estados, y pasándolas a Laplace:

$$sX(s) = As(s) * X(s) + Bs(s) * U(s) \quad (5.1)$$

$$Y(s) = Cs(s) * X(s) + Ds(s) * U(s) \quad (5.2)$$

Luego, despejando $X(s)$ de la ecuación (5.1):

$$[sI - As(s)]X(s) = Bs(s) * U(s)$$

$$X(s) = [sI - As(s)]^{-1}Bs(s) * U(s) \quad (5.3)$$

Reemplazando este resultado de $X(s)$ en (5.2):

$$Y(s) = Cs(s) * [sI - As(s)]^{-1}Bs(s) * U(s) + Ds(s) * U(s)$$

Factorizando $U(s)$ y multiplicando por su inversa a ambos lados:

$$Y(s) * U(s)^{-1} = Cs(s) * [sI - As(s)]^{-1}Bs(s) + Ds(s)$$

El producto $Y(s) * U(s)^{-1}$ representa a la matriz de transferencia del proceso y como la matriz $Ds(s)$ es nula, entonces la expresión de la matriz de transferencia queda como lo indica la ecuación (5.4):

$$T(s) = Cs(s) * [sI - As(s)]^{-1}Bs(s) \quad (5.4)$$

Haciendo las operaciones correspondientes y simplificando los términos de la matriz a funciones de primer orden, se obtiene:

$$T(s) = \begin{bmatrix} T_{11}(s) = \frac{4.5858}{50 * s + 1} & T_{12}(s) = \frac{0.9382}{90 * s + 1} \\ T_{21}(s) = \frac{1.2614}{85 * s + 1} & T_{22}(s) = \frac{4.3421}{50 * s + 1} \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

Con el sistema expresado de esta forma, ahora sí podemos hacerles los respectivos análisis de interacción y otros más.

5.1.1.1 Análisis de interacción

Para iniciar con el análisis de las interacciones, empezaremos por hallar la ganancia estática de la matriz de transferencia (5.5), al reemplazar por cero la variable “s”, así se tiene:

$$T(0) = \begin{bmatrix} 4.5858 & 0.9382 \\ 1.2614 & 4.3421 \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

Que será utilizada en los siguientes criterios.

- **Condition Number**

Con la matriz de (5.6) y mediante la ecuación (4.5) hallamos el número de condición del sistema que resulta:

$$CN(T) = \frac{\bar{\sigma}(T)}{\underline{\sigma}(T)} = 1.6586$$

Entonces podemos decir que el sistema está bien acondicionado ya que el valor del CN es menor a 10.

- **Relative Gain Array**

Para medir la interacción entre las variables de salida y entrada hacemos uso de la ecuación (4.8) según:

$$RGA = \begin{bmatrix} 4.5858 & 0.9382 \\ 1.2614 & 4.3421 \end{bmatrix} \cdot \left\{ \begin{bmatrix} 4.5858 & 0.9382 \\ 1.2614 & 4.3421 \end{bmatrix}^{-1} \right\}^T$$

Resultando:

$$RGA = \begin{bmatrix} 1.0632 & -0.0632 \\ -0.0632 & 1.0632 \end{bmatrix}$$

Según el resultado del RGA, los emparejamientos para el sistema serian:

$$u_1 \rightarrow y_1, u_2 \rightarrow y_2.$$

- **Índice de Niederlinski**

De acuerdo a la ecuación (4.9) y a la configuración de entradas y salidas dadas por el RGA, podemos analizar si el sistema será estable a lazo cerrado:

$$NI = \frac{\begin{vmatrix} 4.5858 & 0.9382 \\ 1.2614 & 4.3421 \end{vmatrix}}{(4.5858) * (4.3421)} = 0.9406$$

Como el NI es positivo, podemos decir que el sistema será estable en lazo cerrado. Por lo tanto podemos empezar con la sintonización de los controladores.

5.1.1.2 Sintonización de los controladores PIs

Para la sintonización emplearemos la asignación de polos, y se harán los cálculos para las dos funciones de transferencia $T_{11}(s)$ y $T_{22}(s)$ según el resultado del RGA, primero cojamos la función $T_{11}(s)$ de la matriz (5.5).

- Sintonización del PI_1 a partir de $T_{11}(s)$:

$$T_{11}(s) = \frac{4.5858}{50 * s + 1}$$

Después de todo el análisis realizado en 4.2.2, utilizamos la ecuación (4.15) para

determinar los parámetros del primer PI al cual llamaremos PI_1 y que están en función de los polos asignados (los polos asignados son: $p_{11} = 0.03$ y $p_{12} = 0.04$), la constante de tiempo ($\tau_{11} = 50$) y la ganancia estática ($kp_{11} = 4.5858$), entonces las expresiones de los parámetros son:

$$k_1 = \sqrt{\left(\frac{50 * (0.03 + 0.04) - 1}{4.5858^2}\right) 50 * 0.03 * 0.04} = 0.3974$$

$$Ti_1 = \frac{4.5858 * 0.3974}{0.03 * 0.04 * 50} = 36.8391$$
(5.7)

- Sintonización del PI_2 a partir de $T_{22}(s)$:

$$T_{22}(s) = \frac{4.3421}{50 * s + 1}$$

De manera similar a la sintonización de los parámetros para PI_1 . Para el PI_2 elegimos los siguientes polos: $p_{21} = 0.035$ y $p_{22} = 0.05$, la constante de tiempo es $\tau_{22} = 50$ y la ganancia estática $kp_{22} = 4.3421$, entonces las expresiones de los parámetros son:

$$k_2 = \sqrt{\left(\frac{50 * (0.035 + 0.05) - 1}{4.3421^2}\right) 50 * 0.035 * 0.05} = 0.3475$$

$$Ti_2 = \frac{4.3421 * 0.3475}{0.035 * 0.05 * 50} = 28.4931$$
(5.8)

Y para evitar el *windup* podemos utilizar el método de seguimiento integral del apartado 4.2.3.1 y recurrimos a seleccionar el adecuado Ta , siendo así:

$$Ta = 2$$

Este valor del Ta será empleado para los dos PI sintonizados (PI_1 y PI_2), ahora si podemos ver el performance del sistema de control en las simulaciones e implementación.

5.1.1.3 Simulación del control PI N°1

En la figura 51 se observa como el proceso alcanza el estado de equilibrio al transcurrir los primeros 300 segundos, el tanque N°2 llega a 26.73 *cm* y el tanque N°4 llega a 33.9 *cm*.

Se mantiene al proceso en el punto de trabajo aproximadamente 100 segundos, luego en $t = 400$ s se hace un cambio de referencia, siendo para el tanque N°2 una referencia de 29 *cm* y para el tanque N°4 una referencia de 32 *cm*.

Pasados 200 segundos después de establecer las primeras referencias y cuando el proceso ya alcanzó un nuevo estado de equilibrio, en $t = 600$ s se cambian nuevamente las referencias, para el tanque N°2 pasa a ser 12 cm y para el tanque N°4 pasa a ser 38 cm.

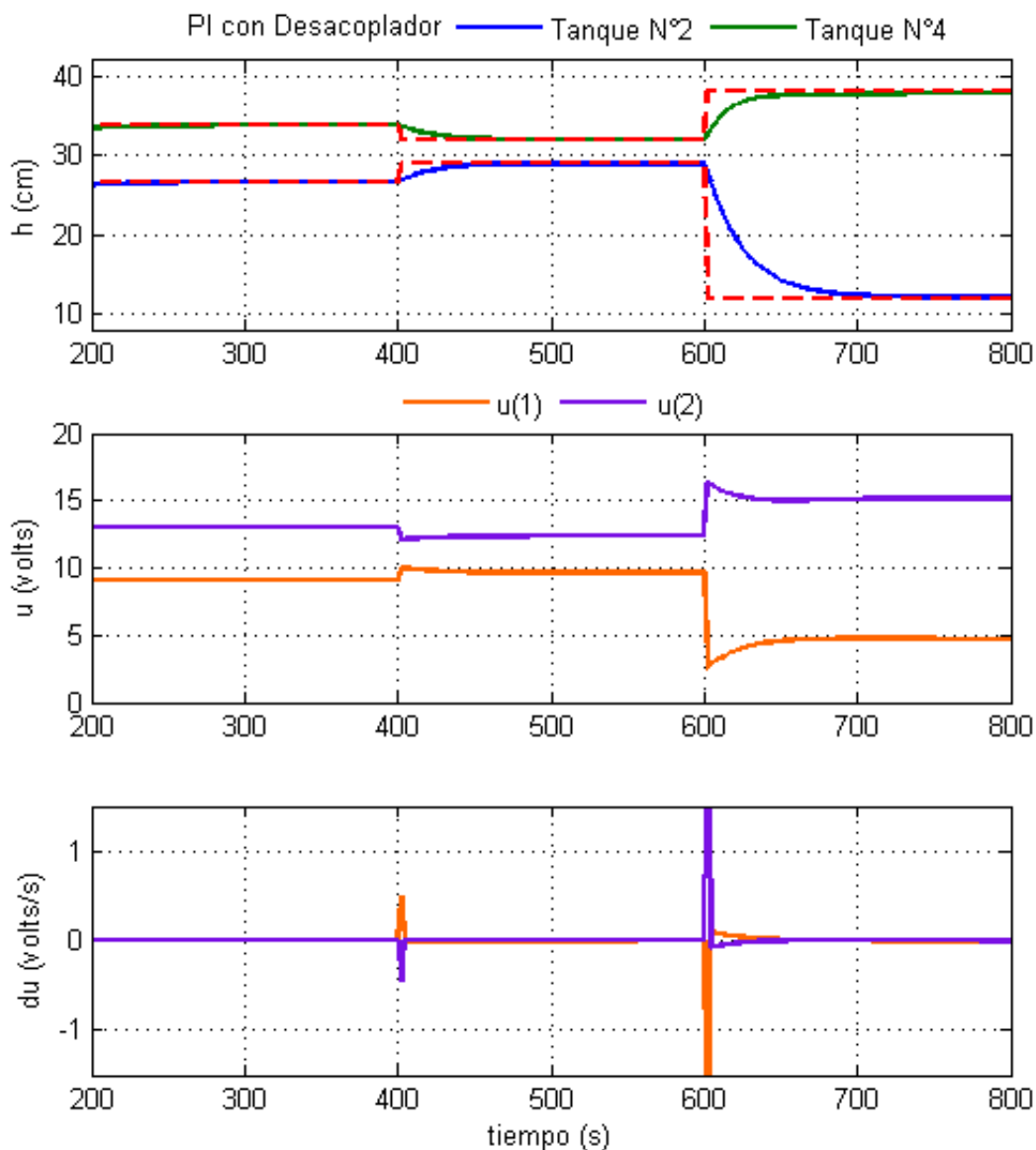


Figura 51. Control PI con *antiwindup*
Fuente: Elaboración propia

El desempeño del sistema de control PI con los parámetros sintonizados en (5.7) y (5.8) es analizado en la figura 51 se observa que las variables de salida tienen un adecuado desempeño, sin embargo, las variables de control tienen unos saltos bruscos de tensión en el cambio de referencias, esto podría afectar la vida útil y el rendimiento de las electrobombas. Cabe mencionar que en este control no se han establecido restricciones para ninguna de las variables.

5.1.2 Diseño del controlador MPC N°1

Par el diseño del controlador predictivo se necesita trabajar en tiempo discreto, por ello, se cogen las matrices A_s , B_s , C_s y D_s que representan el sistema lineal en tiempo continuo y

discretizamos el sistema con un tiempo de muestreo adecuado ($T_s = 5$ s) en espacio de estados, finalmente representado por las matrices siguientes.

$$A_m = \begin{bmatrix} 0.7217 & 0.0000 & 0.1919 & 0.0000 \\ 0.0660 & 0.8794 & 0.0087 & 0.0000 \\ 0.1919 & 0.0000 & 0.6794 & 0.0000 \\ 0.0150 & 0.0000 & 0.1104 & 0.8589 \end{bmatrix}; B_m = \begin{bmatrix} 0.1496 & 0.1496 \\ 0.4459 & 0.0061 \\ 0.1458 & 0.1458 \\ 0.0103 & 0.4451 \end{bmatrix};$$

$$C_m = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; D_m = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

De manera semejante a como se analizó la controlabilidad y observabilidad del sistema en continuo, hace falta también hacerlo en discreto, ya que, el tiempo de muestreo elegido puede hacer variar esas propiedades.

Empezemos por el análisis de la matriz de controlabilidad según la ecuación (4.1):

$$Co_m = [B_m \quad A_m * B_m \quad A_m^2 * B_m \quad A_m^3 * B_m], \quad Co_m \in \mathbb{R}^{4 \times (4 \times 2)},$$

$$Co_m = \begin{bmatrix} 0.1496 & 0.1496 & 0.1359 & 0.1359 & 0.1226 & 0.1226 & 0.1101 & 0.1101 \\ 0.4459 & 0.0061 & 0.4033 & 0.0165 & 0.3647 & 0.0246 & 0.3298 & 0.0307 \\ 0.1458 & 0.1458 & 0.1278 & 0.1278 & 0.1129 & 0.1129 & 0.1002 & 0.1002 \\ 0.0103 & 0.4451 & 0.0272 & 0.4006 & 0.0395 & 0.3602 & 0.0482 & 0.3237 \end{bmatrix}$$

$$rang(Co_m) = 4$$

Como el rango de la matriz de controlabilidad resulta igual al número de estados, el sistema discreto es completamente controlable. Analicemos ahora la matriz de observabilidad como lo indica la ecuación (4.2).

$$Ob_m = \begin{bmatrix} C_m \\ C_m * A_m \\ C_m * A_m^2 \\ C_m * A_m^3 \end{bmatrix}, \quad Ob_m \in \mathbb{R}^{(4 \times 2) \times 4},$$

$$Ob = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.0660 & 0.8794 & 0.0087 & 0.0000 \\ 0.0150 & 0.0000 & 0.1104 & 0.8589 \\ 0.1073 & 0.7734 & 0.0262 & 0.0000 \\ 0.0449 & 0.0000 & 0.1728 & 0.7376 \\ 0.1335 & 0.6801 & 0.0451 & 0.0000 \\ 0.0767 & 0.0000 & 0.2075 & 0.6335 \end{bmatrix}$$

$$rang(Ob_m) = 4$$

El rango de la matriz de observabilidad también resulta igual al número de estados, por lo tanto el sistema discreto también resulta completamente observable.

5.1.2.1 Sistema incrementado

De acuerdo al análisis realizado en el apartado 4.3.1.1 para determinar los componentes matriciales del bloque "Optimizador" de la figura 49 se emplean las ecuaciones (4.22) y (4.23) que contienen a las matrices A, B y C que tienen la siguiente forma para este experimento:

$$A = \begin{bmatrix} 0.7217 & 0.0000 & 0.1919 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0660 & 0.8794 & 0.0087 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1919 & 0.0000 & 0.6794 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0150 & 0.0000 & 0.1104 & 0.8589 & 0 & 0 \\ 0.0660 & 0.8794 & 0.0087 & 0 & 1 & 0 \\ 0.0150 & 0.0000 & 0.1104 & 0.8589 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.1496 & 0.1496 \\ 0.4459 & 0.0061 \\ 0.1458 & 0.1458 \\ 0.0103 & 0.4451 \\ 0.4459 & 0.0061 \\ 0.0103 & 0.4451 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ahora debemos asignar los valores al horizonte de control (N_c) y al horizonte de predicción (N_p) para armar las matrices F y Φ de acuerdo a la ecuación (4.24). Asignando $N_c = 6$ y $N_p = 8$ para éste experimento en particular, entonces:

$$F = \begin{bmatrix} 0.0660 & 0.8794 & 0.0087 & 0.0000 & 1 & 0 \\ 0.0150 & 0.0000 & 0.1104 & 0.8589 & 0 & 1 \\ 0.1733 & 1.6528 & 0.0349 & 0.0000 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1.1115 & 4.6839 & 0.4997 & 0.0000 & 1 & 0 \\ 0.8275 & 0.0000 & 1.6404 & 4.2835 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0.4459 & 0.0061 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0.0103 & 0.4451 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0.8492 & 0.0225 & 0.4459 & 0.0061 & \dots & 0 & 0 \\ 0.0375 & 0.8458 & 0.0103 & 0.04451 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0.2372 & 2.0815 & 0.1794 & 1.8205 & \dots & 0.0103 & 0.4451 \\ 2.3550 & 0.1911 & 2.1115 & 0.1510 & \dots & 0.8492 & 0.0225 \\ 0.2970 & 2.3158 & 0.2372 & 2.0815 & \dots & 0.0375 & 0.8458 \\ 2.5750 & 0.2321 & 2.3550 & 0.1911 & \dots & 1.2140 & 0.0471 \\ 0.3574 & 2.5261 & 0.2970 & 2.3158 & \dots & 0.0770 & 1.2060 \end{bmatrix}$$

Según los valores asignados a N_c y N_p , el performance del control será diferente, ya que, éstos son dos de los tres parámetros de sintonización para el control predictivo. El tercer parámetro de sintonización es el valor de λ que será utilizado más adelante interviniendo en la función de costo para priorizar el consumo de energía o la calidad del control.

5.1.2.2 Estimación de estados

El objetivo de este apartado es determinar la matriz K_{ob} para completar el bloque del “Observador” e implementarlo en el diagrama de control de la figura 49. Esto se logra resolviendo la ecuación (4.27) a continuación:

$$\det \left(zI - \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 0.7217 & 0.0000 & 0.1919 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0660 & 0.8794 & 0.0087 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1919 & 0.0000 & 0.6794 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0150 & 0.0000 & 0.1104 & 0.8589 & 0 & 0 \\ 0.0660 & 0.8794 & 0.0087 & 0 & 1 & 0 \\ 0.0150 & 0.0000 & 0.1104 & 0.8589 & 0 & 1 \end{bmatrix} - K_{ob} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = 0$$

La matriz I es una identidad de dimensión 6 y la matriz incógnita K_{ob} es de dimensión 6×2 . Para solucionar este problema empleamos el método asignación de polos, escogiendo polos rápidos, sean:

$$z_1 = 0.1; \quad z_2 = 0.01; \quad z_3 = 0.01; \quad z_4 = 0.8; \quad z_5 = 0.6; \quad z_6 = 0.5$$

De esta manera se logra obtener la matriz K_{ob} resultando ser:

$$K_{ob} = \begin{bmatrix} 0.2146 & 0.5029 \\ 0.3820 & 0.2309 \\ 0.2032 & 0.4275 \\ 0.1963 & 0.7452 \\ 1.3761 & 0.2331 \\ 0.1983 & 1.7432 \end{bmatrix}$$

5.1.2.3 Restricciones

En este apartado indicaremos los valores límites (máximos y mínimos) que puedan tomar las variables de entrada y salida al sistema para su correcta operación, veamos.

Los límites de las tasas de cambio máximas y mínimas de las acciones de control, es decir, los cambios de tensión en cada periodo de muestreo tienen como límites los siguientes valores:

$$\begin{aligned} \Delta \bar{u}_{1min} &= -1 \\ \Delta \bar{u}_{1max} &= 1 \\ \Delta \bar{u}_{2min} &= -1 \\ \Delta \bar{u}_{2max} &= 1 \end{aligned}$$

Los límites de las magnitudes máximas y mínimas de las acciones de control son a partir de los valores nominales de las tensiones con las que llega al punto de trabajo, es decir, para este experimento se toma como base $u_{10} = 9 \text{ v}$ y $u_{20} = 13 \text{ v}$.

$$\begin{aligned} \bar{u}_{1min} &= -5 \\ \bar{u}_{1max} &= 8 \\ \bar{u}_{2min} &= -5 \\ \bar{u}_{2max} &= 8 \end{aligned}$$

De igual manera, los límites de las magnitudes máximas y mínimas de las variables controladas serán a partir de $y_{10} = 26.73 \text{ cm}$ y $y_{20} = 33.9 \text{ cm}$, niveles que fueron alcanzados cuando el proceso llega al equilibrio dinámico.

$$\begin{aligned}\bar{y}_{1min} &= -15 \\ \bar{y}_{1max} &= 4 \\ \bar{y}_{2min} &= -5 \\ \bar{y}_{2max} &= 9\end{aligned}$$

Por fin tenemos todas las herramientas para iniciar con las pruebas de simulación y control.

5.1.2.4 Simulación del controlador MPC con espacio de estados N°1

En la figura 52 se observa que el proceso alcanza el estado de equilibrio al transcurrir los primeros 300 segundos, el tanque N°2 llega a 26.73 cm y el tanque N°4 llega a 33.9 cm .

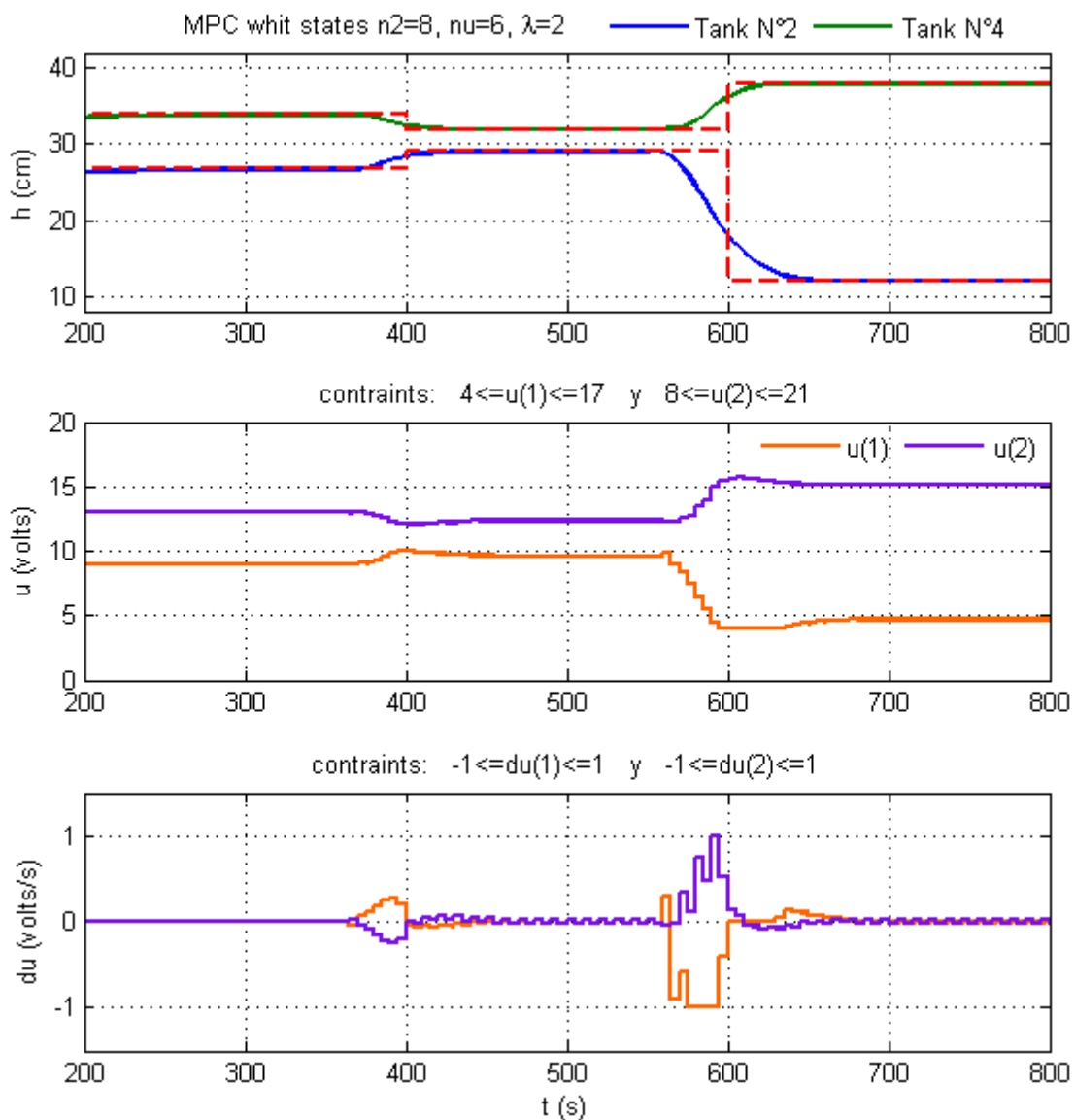


Figura 52. Control MPC con restricciones
Fuente: Elaboración propia

Luego, en $t = 400$ s se hace un cambio de referencia, siendo para el tanque N°2 en 29 cm y para el tanque N°4 en 32 cm. Cuando el proceso ya alcanzó un nuevo estado de equilibrio, en $t = 600$ s se cambian nuevamente las referencias, para el tanque N°2 pasa a ser 12 cm y para el tanque N°4 pasa a ser 38 cm.

Analizando el desempeño del sistema de control predictivo de la figura 51 se observa que las variables de salida empiezan a cambiar antes que se ejecute la referencia, es decir, se adelantan; por otra parte, las variables controladas tienen un comportamiento suavizado gracias a las restricciones impuestas, y también gracias a ello los incrementos de las variables controladas no superan un voltio por cada periodo de muestreo.

Otro análisis importante es el consumo de energía en la acción de control, ya que gracias al uso de un optimizador en línea para la función de costo, se logra una reducción en el consumo comparado con el PI que será analizado en el Experimento de control N°2.

5.2 Experimento de control N°2

En este apartado se muestran los cálculos y resultados del módulo de cuatro tanques acoplados para los parámetros utilizados de las tablas 3 y 4 del apartado 2.2.4.2, para lo cual, las matrices del sistema lineal en campo continuo son las siguientes.

$$A_s = \begin{bmatrix} -0.0206 & -0.0026 & -0.0005 & 0.0006 \\ 0.0234 & -0.0190 & 0.0008 & 0.0011 \\ 0.0018 & -0.0011 & -0.0230 & -0.0028 \\ 0.0001 & 0.0001 & 0.0261 & -0.0214 \end{bmatrix}; B_s = \begin{bmatrix} 0.0010 & 0.1171 \\ 0.0189 & -0.0059 \\ 0.1014 & -0.0036 \\ -0.0017 & 0.0119 \end{bmatrix};$$

$$C_s = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; D_s = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para implementar un sistema de control al proceso, primero hay que analizar si es controlable y observable total o parcialmente. Analicemos primero la matriz de controlabilidad según la ecuación (4.1).

$$C_o = [B_s \quad A_s * B_s \quad A_s^2 * B_s \quad A_s^3 * B_s], \quad C_o \in \mathbb{R}^{4 \times (4 \times 2)},$$

Como el sistema lineal tiene cuatro estados y dos entradas, entonces la matriz de controlabilidad es de dimensión 4×8 y los valores de su contenido son los siguientes.

$$C_o = \begin{bmatrix} 0.0010 & 0.1171 & -0.0001 & -0.0024 & 0.0000 & 0.0000 & 0 & 0 \\ 0.0189 & -0.0059 & -0.0003 & 0.0029 & 0.0000 & -0.0001 & 0 & 0 \\ 0.1014 & -0.0036 & -0.0023 & 0.0003 & 0.0000 & 0.0000 & 0 & 0 \\ -0.0017 & 0.0119 & 0.0027 & -0.0003 & -0.0001 & 0.0000 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{rang}(C_o) = 4$$

Como el rango de la matriz de controlabilidad resulta igual al número de estados, se infiere que el sistema es completamente controlable. Ahora veamos la matriz de observabilidad de acuerdo a la ecuación (4.2).

$$Ob = \begin{bmatrix} Cs \\ Cs * As \\ Cs * As^2 \\ Cs * As^3 \end{bmatrix}, Ob \in \mathbb{R}^{(4 \times 2) \times 4},$$

La matriz de observabilidad es de dimensión 8×4 debido a los cuatro estados y dos salidas.

$$Ob = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.0234 & -0.0190 & 0.0008 & 0.0011 \\ 0.0001 & 0.0001 & 0.0261 & -0.0214 \\ -0.0009 & 0.0003 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & -0.0012 & 0.0004 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$rang(Ob) = 4$$

El rango de la matriz de observabilidad también resulta igual al número de estados del sistema, por lo tanto es un sistema completamente observable.

5.2.1 Diseño del controlador PI

En el proceso del módulo de cuatro tanques acoplados, se nota que el comportamiento del nivel de los tanques sigue una tendencia a parecerse a un sistema de primer orden, sin sobreoscilaciones, por ende, solo es necesario implementar un controlador PI (parte proporcional e integral) para que el sistema pueda seguir las referencias asignadas, tal como se aplicó para el experimento N°1.

Para el diseño de sistema de control PI, es necesario trabajar con una matriz de transferencia por tratarse de un sistema multivariable, sin embargo, al tener el sistema expresado en espacio de estados debemos hacer una conversión, de la cual ya se hizo la deducción en el Experimento de control N°1, para esto utilizamos la ecuación (5.4) y así se obtiene:

$$T(s) = \begin{bmatrix} T_{11}(s) = \frac{1.3214}{70 * s + 1} & T_{12}(s) = \frac{5.8280}{100 * s + 1} \\ T_{21}(s) = \frac{4.5441}{90 * s + 1} & T_{22}(s) = \frac{0.4786}{40 * s + 1} \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

Con el sistema expresado de esta forma, ahora sí podemos hacerles los respectivos análisis de interacción y otros más.

5.2.1.1 Análisis de interacción

Para el análisis de las interacciones, empezaremos por hallar la ganancia estática de la matriz de transferencia (5.9), al reemplazar por cero la variable “s”, así se tiene:

$$T(0) = \begin{bmatrix} 1.3214 & 5.8280 \\ 4.5441 & 0.4786 \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

Que será utilizada en los siguientes criterios.

- **Condition Number**

Con la matriz de (5.10) y mediante la ecuación (4.5) hallamos el número de condición del sistema que resulta:

$$CN(T) = \frac{\bar{\sigma}(T)}{\underline{\sigma}(T)} = 1.925$$

Entonces podemos decir que el sistema está bien acondicionado ya que el valor del CN es menor a 10.

- **Relative Gain Array**

Para medir la interacción entre las variables de salida y entrada hacemos uso de la ecuación (4.8) según:

$$RGA = \begin{bmatrix} 1.3214 & 5.8280 \\ 4.5441 & 0.4786 \end{bmatrix} \cdot \left\{ \begin{bmatrix} 1.3214 & 5.8280 \\ 4.5441 & 0.4786 \end{bmatrix}^{-1} \right\}^T$$

Resultando:

$$RGA = \begin{bmatrix} -0.0245 & 1.0245 \\ 1.0245 & -0.0245 \end{bmatrix}$$

Según el resultado del RGA, los emparejamientos para el sistema serian:

$u_1 \rightarrow y_2$, $u_2 \rightarrow y_1$, distintos al caso del Experimento de control N°1.

Entonces para la sintonización adecuada de los PI debemos invertir las filas de la matriz (5.9).

$$T = \begin{matrix} & \begin{matrix} u_1 \\ \downarrow \\ 4.5441 \end{matrix} & & \begin{matrix} u_2 \\ \downarrow \\ 0.4786 \end{matrix} \\ \begin{matrix} y_2 \rightarrow \\ y_1 \rightarrow \end{matrix} & \left[\begin{matrix} T_{11}(s) = \frac{4.5441}{90 * s + 1} & T_{12}(s) = \frac{0.4786}{40 * s + 1} \\ T_{21}(s) = \frac{1.3214}{70 * s + 1} & T_{22}(s) = \frac{5.8280}{100 * s + 1} \end{matrix} \right] & & \end{matrix} \quad (5.11)$$

Ahora si los emparejamientos son para los términos de la diagonal de la matriz. Y así obtenemos una nueva matriz de ganancias estáticas.

$$T(0) = \begin{bmatrix} 4.5441 & 0.4786 \\ 1.3214 & 5.8280 \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

- **Índice de Niederlinski**

De acuerdo a la ecuación (4.9) y a la configuración de entradas y salidas dadas por el RGA, podemos analizar si el sistema será estable a lazo cerrado:

$$NI = \frac{\begin{vmatrix} 4.5441 & 0.4786 \\ 1.3214 & 5.8280 \end{vmatrix}}{(4.5441) * (5.8280)} = 0.9761$$

Como el NI es positivo, podemos decir que el sistema será estable en lazo cerrado. Por lo tanto podemos empezar con la sintonización de los controladores.

5.2.1.2 Sintonización de los PIs

Para la sintonización emplearemos la asignación de polos, y se harán los cálculos para las dos funciones de transferencia $T_{11}(s)$ y $T_{22}(s)$ según el resultado del RGA, primero cojamos la función $T_{11}(s)$ de la matriz (5.11).

- Sintonización del PI_1 a partir de $T_{11}(s)$:

$$T_{11}(s) = \frac{4.5441}{90 * s + 1}$$

Después de todo el análisis realizado en 4.2.2, utilizamos la ecuación (4.15) para determinar los parámetros del primer PI al cual llamaremos PI_1 y que están en función de los polos asignados (los polos asignados son: $p_{11} = 0.0189$ y $p_{12} = 0.0144$), la constante de tiempo ($\tau_{11} = 90$) y la ganancia estática ($kp_{11} = 4.5441$), entonces las expresiones de los parámetros son:

$$k_1 = \sqrt{\left(\frac{90 * (0.0189 + 0.0144) - 1}{4.5441^2}\right) 90 * 0.0189 * 0.0144} = 0.441 \quad (5.13)$$

$$Ti_1 = \frac{4.5441 * 0.441}{0.0189 * 0.0144 * 90} = 81.448$$

- Sintonización del PI_2 a partir de $T_{22}(s)$:

$$T_{22}(s) = \frac{5.8280}{100 * s + 1}$$

De manera similar a la sintonización de los parámetros para PI_1 . Para el PI_2 elegimos los siguientes polos: $p_{21} = 0.017$ y $p_{22} = 0.013$, la constante de tiempo es $\tau_{22} = 100$ y la ganancia estática $kp_{22} = 5.8280$, entonces las expresiones de los parámetros son:

$$k_2 = \sqrt{\left(\frac{100 * (0.017 + 0.013) - 1}{5.8280^2}\right) 100 * 0.017 * 0.013} = 0.3432 \quad (5.9)$$

$$Ti_2 = \frac{5.8280 * 0.3432}{0.017 * 0.013 * 100} = 90.4977$$

Y para evitar el *windup* podemos utilizar el método de seguimiento integral del apartado 4.2.3.1 y recurrimos a seleccionar el adecuado Ta , siendo así:

$$Ta = 2$$

Este valor del Ta será empleado para los dos PI sintonizados (PI_1 y PI_2), ahora si podemos ver el performance del sistema de control en las simulaciones e implementación.

5.2.1.3 Implementación del control PI

El proceso a controlar es el llenado de los tanques del Módulo de cuatro tanques acoplados del Laboratorio de Sistemas automáticos de control de la Universidad de Piura, representado por dos entradas y dos salidas.

En la figura 53 se observa como el proceso alcanza el estado de equilibrio al transcurrir los primeros 350 segundos, el tanque N°2 llega a 38.3 cm y el tanque N°4 llega a 22.2 cm. Se mantiene al proceso en el punto de trabajo aproximadamente 100 segundos, luego en $t = 450$ s se hace un cambio de referencia, siendo para el tanque N°2 en 45 cm y para el tanque N°4 una referencia de 28 cm.

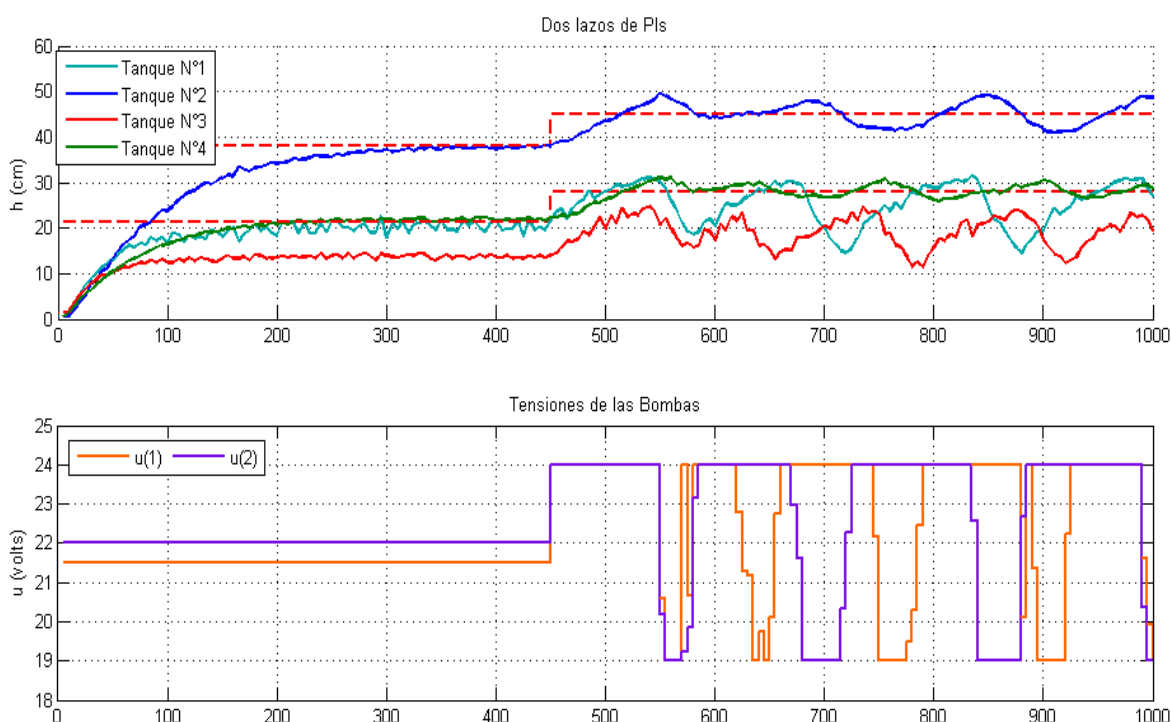


Figura 53. Control PI sin *antiwindup*
Fuente: Elaboración propia

Como podemos observar en la figura 53 las variables controladas oscilan entre los límites de operación sin apreciar una lógica de control que gobierne el sistema, de esto se deduce que el proceso presenta el fenómeno de *windup*.

Para corregir éste problema adicionaremos a los controladores PI el método de seguimiento integral *antiwindup*, tal como puede ser apreciado en la figura 54 y que brinda un mejor control de las variables de salida y mejor performance de las variables controladas.

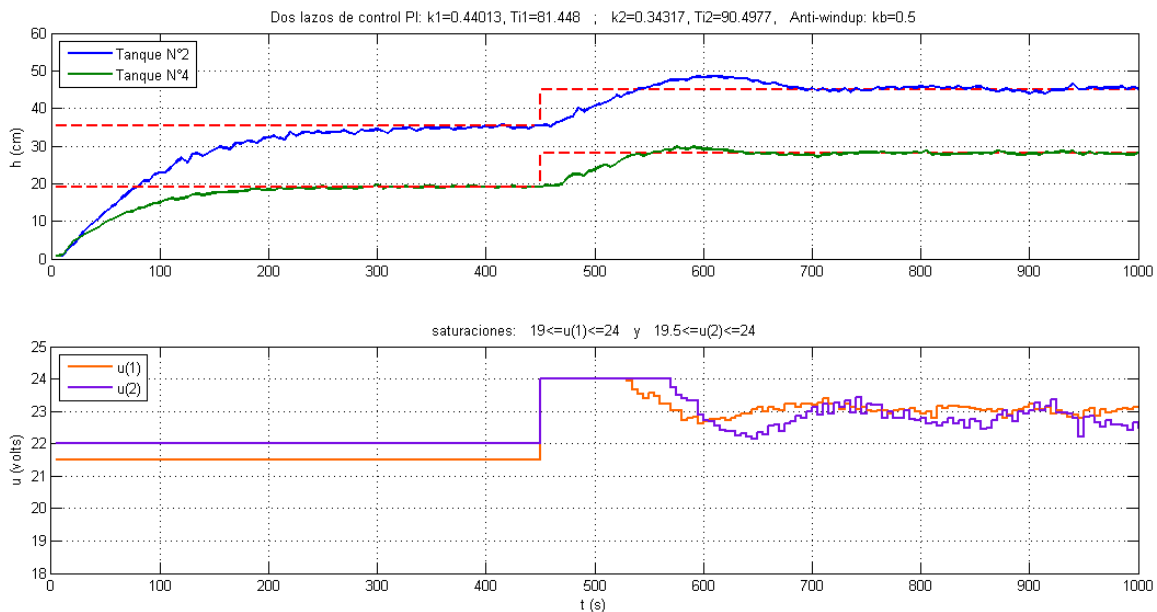


Figura 54. Control PI con *antiwindup*
Fuente: Elaboración propia

El valor del parámetro Ta para éste método es 2, y es seleccionado a medida que reduzca mejor el *overshoot*.

5.2.2 Diseño del controlador MPC

Par el diseño del controlador predictivo se necesita trabajar en tiempo discreto, por ello, se cogen las matrices As, Bs, Cs y Ds que representan el sistema lineal en tiempo continuo y discretizamos el sistema con un tiempo de muestreo adecuado ($Ts = 5 s$) en espacio de estados, al igual que en el Experimento de control N°1.

$$A_m = \begin{bmatrix} 0.9014 & -0.0117 & -0.0023 & 0.0025 \\ 0.1061 & 0.9087 & 0.0036 & 0.0049 \\ 0.0076 & -0.0051 & 0.8906 & -0.0124 \\ 0.0008 & 0.0001 & 0.1168 & 0.8978 \end{bmatrix}; B_m = \begin{bmatrix} 0.0035 & 0.5566 \\ 0.0913 & 0.0041 \\ 0.4788 & -0.0150 \\ 0.0227 & 0.0555 \end{bmatrix};$$

$$C_m = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; D_m = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

De manera semejante a como se analizó la controlabilidad y observabilidad del sistema en continuo, hace falta también hacerlo en discreto, ya que, el tiempo de muestreo elegido puede hacer variar esas propiedades.

Empecemos por el análisis de la matriz de controlabilidad según la ecuación (4.1):

$$Co_m = [B_m \quad A_m * B_m \quad A_m^2 * B_m \quad A_m^3 * B_m], \quad Co_m \in \mathbb{R}^{4 \times (4 \times 2)},$$

$$C_{o_m} = \begin{bmatrix} 0.0035 & 0.5566 & 0.0010 & 0.5018 & -0.0008 & 0.4518 & -0.0023 & 0.4061 \\ 0.0913 & 0.0041 & 0.0852 & 0.0630 & 0.0794 & 0.1107 & 0.0740 & 0.1487 \\ 0.4788 & -0.0150 & 0.4257 & -0.0098 & 0.3778 & -0.0059 & 0.3346 & -0.0029 \\ 0.0227 & 0.0555 & 0.0763 & 0.0485 & 0.1182 & 0.0428 & 0.1503 & 0.0381 \end{bmatrix}$$

$$\text{rang}(C_{o_m}) = 4$$

Como el rango de la matriz de controlabilidad resulta igual al número de estados, el sistema discreto es completamente controlable. Analicemos ahora la matriz de observabilidad como lo indica la ecuación (4.2).

$$Ob_m = \begin{bmatrix} C_m \\ C_m * A_m \\ C_m * A_m^2 \\ C_m * A_m^3 \end{bmatrix}, \quad Ob_m \in \mathbb{R}^{(4 \times 2) \times 4},$$

$$Ob = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.1061 & 0.9087 & 0.0036 & 0.0049 \\ 0.0008 & 0.0001 & 0.1168 & 0.8978 \\ 0.1921 & 0.8245 & 0.0068 & 0.0091 \\ 0.0023 & -0.0004 & 0.2089 & 0.8046 \\ 0.2607 & 0.7469 & 0.0096 & 0.0126 \\ 0.0043 & -0.0014 & 0.2800 & 0.7198 \end{bmatrix}$$

$$\text{rang}(C_{o_m}) = 4$$

El rango de la matriz de observabilidad también resulta igual al número de estados, por lo tanto el sistema discreto también resulta completamente observable.

5.2.2.1 Sistema incrementado

De acuerdo al análisis realizado en el apartado 4.3.1.1 para determinar los componentes matriciales del bloque "Optimizador" de la figura 49 se emplean las ecuaciones (4.22) y (4.23) que contienen a las matrices A, B y C que tienen la siguiente forma para este experimento:

$$A = \begin{bmatrix} 0.9014 & -0.0117 & -0.0023 & 0.0025 & 0 & 0 \\ 0.1061 & 0.9087 & 0.0036 & 0.0049 & 0 & 0 \\ 0.0076 & -0.0051 & 0.8906 & -0.0124 & 0 & 0 \\ 0.0008 & 0.0001 & 0.1168 & 0.8978 & 0 & 0 \\ 0.1061 & 0.9087 & 0.0036 & 0.0049 & 1 & 0 \\ 0.0008 & 0.0001 & 0.1168 & 0.8978 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.0035 & 0.5566 \\ 0.0913 & 0.0041 \\ 0.4788 & -0.0150 \\ 0.0227 & 0.0555 \\ 0.0913 & 0.0041 \\ 0.0227 & 0.0555 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ahora debemos asignar los valores al horizonte de control (N_c) y al horizonte de predicción (N_p) para armar las matrices F y ϕ de acuerdo a la ecuación (4.24). Asignando $N_c = 14$ y $N_p = 15$ para éste experimento en particular, entonces:

$$F = \begin{bmatrix} 0.1061 & 0.9087 & 0.0036 & 0.0049 & 1 & 0 \\ 0.0008 & 0.0001 & 0.1168 & 0.8978 & 0 & 1 \\ 0.2982 & 1.7332 & 0.0104 & 0.0140 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 5.2940 & 7.3048 & 0.2551 & 0.2847 & 1 & 0 \\ 0.1740 & -0.1259 & 5.2800 & 6.7524 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\phi = \begin{bmatrix} 0.0913 & 0.0041 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0.0227 & 0.0555 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0.1765 & 0.0671 & 0.0913 & 0.0041 & \dots & 0 & 0 \\ 0.0990 & 0.1040 & 0.0227 & 0.0555 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2.1622 & 0.4048 & 1.9683 & 0.3879 & \dots & 0 & 0 \\ 0.8404 & 2.5616 & 0.8042 & 2.3348 & \dots & 0.0913 & 0.0041 \\ 2.3481 & 0.4203 & 2.1622 & 0.4048 & \dots & 0.0227 & 0.0555 \\ 0.8741 & 2.7812 & 0.8404 & 2.5616 & \dots & 0.1765 & 0.0671 \\ 2.5253 & 0.4345 & 2.3481 & 0.4203 & \dots & 0.0990 & 0.1040 \end{bmatrix}$$

Según los valores asignados a N_c y N_p , el performance del control será diferente, ya que, éstos son dos de los tres parámetros de sintonización para el control predictivo. El tercer parámetro de sintonización es el valor de λ que es utilizado en la función de costo para priorizar el consumo de energía o la calidad del control, para éste experimento le asignamos $\lambda = 0.2$.

5.2.2.2 Estimación de estados

El objetivo de este apartado es determinar la matriz K_{ob} para completar el bloque del “Observador” e implementarlo en el diagrama de control de la figura 49. Esto se logra resolviendo la ecuación (4.27) a continuación:

$$\det \left(zI - \left(\begin{bmatrix} 0.9014 & -0.0117 & -0.0023 & 0.0025 & 0 & 0 \\ 0.1061 & 0.9087 & 0.0036 & 0.0049 & 0 & 0 \\ 0.0076 & -0.0051 & 0.8906 & -0.0124 & 0 & 0 \\ 0.0008 & 0.0001 & 0.1168 & 0.8978 & 0 & 0 \\ 0.1061 & 0.9087 & 0.0036 & 0.0049 & 1 & 0 \\ 0.0008 & 0.0001 & 0.1168 & 0.8978 & 0 & 1 \end{bmatrix} - K_{ob} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \right) = 0$$

La matriz I es una identidad de dimensión 6 y la matriz incógnita K_{ob} es de dimensión 6x2. Para solucionar este problema empleamos el método asignación de polos, escogiendo polos rápidos, sean:

$$z_1 = 0.1; \quad z_2 = 0.01; \quad z_3 = 0.01; \quad z_4 = 0.8; \quad z_5 = 0.6; \quad z_6 = 0.5$$

De esta manera se logra obtener la matriz K_{ob} resultando ser:

$$K_{ob} = \begin{bmatrix} 0.6799 & 0.6807 \\ 0.6131 & 0.2429 \\ 0.6345 & 1.6462 \\ 0.2274 & 0.9710 \\ 1.6090 & 0.2446 \\ 0.2290 & 1.9695 \end{bmatrix}$$

Cabe mencionar que coincidentemente se asignaron los mismos polos para los dos experimentos de control, y que podrían cambiarse sin ningún problema.

5.2.2.3 Restricciones

En este apartado indicaremos los valores límites (máximos y mínimos) que puedan tomar las variables de entrada y salida al sistema para su correcta operación, veamos.

Los límites de las tasas de cambio máximas y mínimas de las acciones de control, es decir, los cambios de tensión en cada periodo de muestreo tienen como límites los siguientes valores:

$$\begin{aligned} \Delta \bar{u}_{1min} &= -0.5 \\ \Delta \bar{u}_{1max} &= 0.5 \\ \Delta \bar{u}_{2min} &= -0.5 \\ \Delta \bar{u}_{2max} &= 0.5 \end{aligned}$$

Los límites de las magnitudes máximas y mínimas de las acciones de control son a partir de los valores nominales de las tensiones con las que llega al punto de trabajo, es decir, para este experimento se toma como base $u_{10} = 21.5 \text{ v}$ y $u_{20} = 22 \text{ v}$.

$$\begin{aligned} \bar{u}_{1min} &= -2.5 \\ \bar{u}_{1max} &= 2.5 \\ \bar{u}_{2min} &= -2.5 \\ \bar{u}_{2max} &= 2.5 \end{aligned}$$

De igual manera, los límites de las magnitudes máximas y mínimas de las variables controladas serán a partir de $y_{10} = 38.3 \text{ cm}$ y $y_{20} = 22.2 \text{ cm}$, niveles que fueron alcanzados cuando el proceso llego al equilibrio dinámico.

$$\begin{aligned} \bar{y}_{1min} &= -10 \\ \bar{y}_{1max} &= 12 \\ \bar{y}_{2min} &= -10 \\ \bar{y}_{2max} &= 12 \end{aligned}$$

Ahora si tenemos todas las herramientas para iniciar con las pruebas de simulación y control.

5.2.2.4 Implementación del MPC con espacio de estados N°2

En la figura 55 se observa como el proceso del llenado de los tanques del Módulo de cuatro tanques acoplados del Laboratorio de Sistemas automáticos de control de la

Universidad de Piura alcanza el estado de equilibrio al transcurrir los primeros 350 segundos, el tanque N°2 llega a 38.3 cm y el tanque N°4 llega a 22.2 cm. Se mantiene en el punto de trabajo aproximadamente 100 segundos, luego en $t = 450$ s se hace un cambio de referencia, siendo para el tanque N°2 en 45 cm y para el tanque N°4 una referencia de 28 cm.

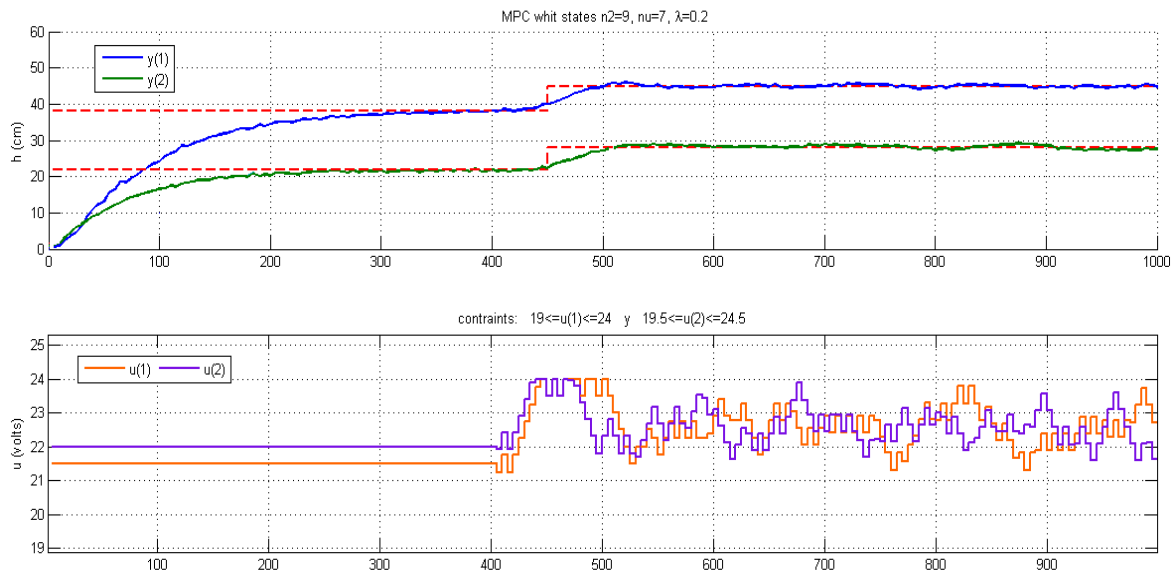


Figura 55. Controlador Predictivo con retroalimentación de estados
Fuente: *Elaboración propia*

Analizando el desempeño del sistema de control predictivo de la figura 51 se observa que las variables de salida empiezan a cambiar antes que se ejecute la referencia, es decir, se adelantan; por otra parte, las variables controladas tienen un comportamiento suavizado gracias a las restricciones impuestas, y también gracias a ello los incrementos de las variables controladas no superan medio voltio por cada periodo de muestreo. Así, en la tabla 7 se reúne a los parámetros de sintonización para éste experimento.

Tabla 7- Parámetros sintonizados del controlador predictivo

Parámetros <i>MPC</i> con retroalimentación de estados	Valor
Primer horizonte de predicción (N_p)	15
Horizonte de control (N_c)	14
Coefficiente del esfuerzo de control (λ)	0.2

Fuente: Elaboración propia

Otro análisis importante es el consumo de energía en la acción de control, ya que gracias al uso de un optimizador en línea para la función de costo sujeto al comando *quadprog* de Matlab, se logra una reducción en el consumo comparado con el PI.

En la tabla 8 se muestra el energético consumido por cada controlador y la comparación entre ellos para evidenciar que el controlador predictivo brinda mayores ventajas que el control clásico.

Tabla 8- Comparación de controladores

	Consumo (<i>mW-h</i>)	Ahorro (<i>mW-h</i>)	Ahorro %
MPC	2583	419	13.95
PI	3002		

Fuente: Elaboración propia

También fue importante el tiempo en el que trabajo cada controlador para alcanzar la nueva referencia. Para empezar el sistema del control clásico alcanzó la referencia en 250 segundos, mientras que el controlador predictivo lo hizo en 150 segundos, 100 segundos más rápido.

Conclusiones

- El uso de un modelo matemático basado en leyes físicas mediante el balance de energía, se manifiesta como un punto a favor en las técnicas de control óptimo; además permite configurar parámetros, como niveles iniciales, niveles de tensión usados, e incluso la geometría del módulo.
- El modelo matemático del proceso tiene una buena aproximación y se evidencia que a lazo abierto es estable, esto se puede observar comparando la simulación tanto en Ecosimpro como en Simulink, donde se partieron de distintas condiciones iniciales, y aún así se llegó a los mismos valores de establecimiento en el equilibrio y al igual que el sistema real.
- La simulación de las técnicas de control resulta una herramienta muy útil para estudiar como será el desenvolvimiento del controlador una vez implementado en el módulo.
- El control mediante lazos PI hizo que el error en el estacionario se reduzca a cero, tiene un buen desenvolvimiento y mejoró mucho con la implementación del anti-windup.
- Varios métodos empíricos pueden usarse para sintonizar los parámetros de un controlador PI. Sin embargo, el ajuste obtenido debe tomarse como un primer paso en el proceso de diseño.
- El control MPC, empieza a controlar anticipándose al cambio de referencia, tal como lo señala la teoría y presenta un buen desenvolvimiento.
- Es importante tener en cuenta que los parámetros de sintonización para ambos controladores son válidos para la zona de trabajo en el cual fue linealizado el proceso, los cuales tendrán que ser ajustados si se desea trabajar en otro punto de linealización.
- El poco ruido que existe en la señal de salida es debido al driver que se elaboró para manipular las electrobombas, y por consiguiente, no es homologado.
- El análisis del aspecto económico es muy importante, ya que, permite hallar las ventajas del controlador predictivo al consumir menor energía y se refleja en el costo de ahorro.

Recomendaciones para trabajos futuros

- Mejorar el diseño del estimador usando filtro de Kalman. Y comparar las metodologías de control realizadas con otros diseños de controladores e implementar un controlador no lineal.
- Implementar los algoritmos de control en plataformas libres para tener mayor versatilidad.
- Una recomendación para implementar otros protocolos de comunicación industrial al módulo, es en primer lugar evaluar las funcionalidades que tienen los equipos instalados para hacer interface y comunicarlos adecuadamente.

Bibliografía

- [1] V. R. Ravi, «Dynamic Matrix Control of a Two Conical Tank Interacting Level System,» *International Conference on Modelling Optimisation and Computing*, vol. 38, pp. 2601-2610, 2012.
- [2] D. Dinesh Kumar, «Design and Implementation of Non Linear System Using Gain Scheduled PI Controller,» *SciVerse ScienceDirect*, vol. 38, pp. 3105-3112, 2012.
- [3] S. Pérez Izquieta, *Control de Tanques Acoplados*, Navarra: Universidad Pública de Navarra, 2011.
- [4] B. Mayer, «Management of hybrid energy supply systems in buildings using mixed-integer model predictive control,» *Energy Conversion and Management*, vol. 98, pp. 470-483, 2015.
- [5] S. -C. Georgescu, «Application of HBMOA to pumping stations scheduling for a water distribution network with multiple tanks,» *12th International Conference on Computing and Control for the Water Industry*, vol. 70, pp. 715-723, 2014.
- [6] Escuela Superior Politécnica del Litoral, Centro de Investigación Científica y tecnológica, «Diseño y Construcción del Modelo de una Planta de nivel de Líquido, Sistema vasos comunicantes,» Guayaquil, 2011.
- [7] M. Farina y G. Betti, «Distributed predictive control of continuous time systems,» *Systems & Control Letters*, vol. 74, pp. 32-40, 2014.
- [8] J. D. Hedengren y R. Asgharzadeh, «Nonlinear modeling, estimation and predictive control in APMonitor,» *Computers and Chemical Engineering*, vol. 70, pp. 133-148, 2014.
- [9] Q. Saeed y V. Uddin, «Multivariable Predictive PID Control for Quadruple Tank,» *World Academy of Science, Engineering and Technology*, vol. 43, pp. 861-866, 2010.
- [10] D. Sarabia Ortiz, *Modelado, Simulación y Control Predictivo de Sistemas Híbridos*, Valladolid: Universidad de Valladolid, 2007.
- [11] A. Assandri, *Introducción al Modelado y Simulación de Sistemas*, San Juan: Universidad Nacional de San Juan - Argentina, 2014.
- [12] Wikipedia, 15 Octubre 2015. [En línea]. Available: https://es.wikipedia.org/wiki/Control_de_nivel#Controles_de_nivel_para_tanques_de_almacenamiento_de_agua. [Último acceso: 13 Enero 2016].
- [13] A. C. Aguilar, O. C. Castro Urresta y F. F. Obando, «Control PID desacoplado para un sistema de tanques interactuantes,» de *International Society of Automation, IV Automatisa*, Bogotá, 2013.

- [14] A. Harivignesh, «System Identification and Design of controllers For a Hybrid Tank System,» de *IEEE International Conference on Innovations in Engineering and Technology*, 2014.
- [15] V. Kirubakaran, «Distributed multiparametric model predictive control design for a quadruple tank process,» *ScienceDirect*, vol. 47, pp. 841-854, 2014.
- [16] J. Cyril, «Design and implementation of model predictive control for a three-tank hybrid system,» *International Journal of Computer Science and Electronics Engineering*, vol. 1, pp. 167-171, 2013.
- [17] M. U. Khalid, «Liquid Level Control of Nonlinear Coupled Tanks System using Linear Model Predictive Control,» de *Emerging echnologies (ICET)*, Islamabad, 2012.
- [18] F. Stinga y A. Soimu, «Hybrid Modelling and control for a two-tank system,» de *Tomul LVI (LX)*, Gheofghe Asachi, Rumania, 2010.
- [19] J. E. Oquelis Cabredo, Metodología para la integración de sistemas heterogéneos de comunicaciones de campo en entornos industriales, Las Palmas de Gran Canaria: Universidad de las Palmas de Gran Canaria E.T.S.I. Telecomunicaciones, 1997.
- [20] G. A. Tejada Calderón, Implementación de una red Modbus para aplicaciones de pesado dinámico, Piura: Universidad de Piura, 2009.
- [21] Mathmodelling, «Modelación Matemática,» [En línea]. Available: <http://www.mathmodelling.org/>. [Último acceso: 26 01 2016].
- [22] Scribd, «Scribd,» Scribd, [En línea]. Available: <https://es.scribd.com/doc/144068998/LINEALIZACION-DE-MODELOS-MATEMATICOS-NO-LINEALES>. [Último acceso: 18 01 2016].
- [23] W. Ipanaqué, Control automático de Procesos, Piura: Gráfica y Servicios San Martín, 2012.
- [24] Universidad de Piura, «Identificación,» [En línea]. Available: http://www.biblioteca.udep.edu.pe/bibvirudep/tesis/pdf/1_188_184_136_1787.pdf. [Último acceso: 14 01 2016].
- [25] Universidad de Oviedo, «Diseño de Sistemas de Control por Computador,» Universidad de Oviedo, 01 11 2008. [En línea]. Available: <isa.uniovi.es/docencia/dscc>. [Último acceso: 30 10 2015].
- [26] Universidad de Valparaiso, «Comunidad Biomédica,» Ingeniería Biomédica, [En línea]. Available: http://comunidadbiomedica.tripod.com/sitebuildercontent/Clase_11.pdf. [Último acceso: 27 09 2015].
- [27] W. Ipanaqué Alama, «Laboratorio 6: Control Multivariable,» Universidad de Piura, Piura, 2014.
- [28] Universidad de Piura, «Laboratorio de Windup y Bumples,» Universidad de Piura, Piura, 2014.
- [29] E. Adam, Conceptos Básicos de Control Predictivo, Santa Fe: Universidad Nacional del Litoral, 2014.
- [30] L. Wang, Model Predictive Control System Design and Implementation Using MATLAB, vol. 70, London: Springer, 2014, pp. 715-723.

ANEXO A

PAPER PRESENTADO EN GUAYAQUIL – ECUADOR

Modeling and comparison of PID, GPC and MPC with state space controllers in a Coupled Tanks System

(Modelación y comparación de controladores PID, GPC y MPC con espacio de estados en un Sistema de Tanques Acoplados)

William Ipanaqué, Peter Gutarra, José Manrique and José Oliden

Abstract—In this paper the behavior of three controllers is analyzed: PID, GPC and MPC with a state space in a multivariable coupled tanks system, with the main objective to compare are advantages and disadvantages that offering to regulate the fluid level in the tanks. As it want to control a nonlinear system, first concerning the linearized model in a work point, so the model representation is obtained in the state space and transfer matrix. Then, the simulation results are obtained with each controller. Finally, the performance of the three controllers are obtained and important conclusions about quality control and energy saving are mentioned.

Keywords: PID, GPC, MPC, state space, multivariable.

I. INTRODUCCIÓN

Actualmente en los procesos industriales es frecuente encontrar sistemas en los cuales es de mucha importancia controlar el nivel de dos o más tanques, cuyo comportamiento dinámico depende del caudal resultante de otros tanques, ante esto la estrategia de control debe considerar que cada parámetro puede mostrar una dependencia fuerte de otros.

En [1] se ha realizado la implementación de un control PID desacoplado para controlar el nivel de dos tanques de un sistema de 6 tanques, tomando en cuenta los disturbios en los caudales a la entrada y salida, mostrando resultados favorables. En la referencia [2] se puede observar la comparación de los controladores PID, IMC y lógica difusa, dónde se puede ver la mejora de estos dos últimos sobre el primero, en el overshoot y tiempo de establecimiento, en este estudio se ha obtenido el modelo a través de la identificación. La comparación del control predictivo distribuido multi paramétrico y el control PID desacoplado se muestra en [3], donde se observa el rechazo a los disturbios presentados, además se considera restricciones. Para un sistema de tres tanques híbrido se ha empleado un control predictivo con buenos

William Ipanaqué is with Department of Electronics and Automation, Universidad de Piura, Urb. San Eduardo, Piura, Perú (william.ipanaque@udep.pe)

Peter Gutarra is student master's degree in Department of Electronics and Automation, Universidad de Piura, Urb. San Eduardo, Piura, Perú (peter.gutarra@posgrado.udep.edu.pe)

José Manrique is with Department of Electronics and Automation, Universidad de Piura, Urb. San Eduardo, Piura, Perú (jose.manrique@udep.pe)

José Oliden is student master's degree in Department of Electronics and Automation, Universidad de Piura, Urb. San Eduardo, Piura, Perú (jose.oliden@posgrado.udep.edu.pe)

resultados en [4]. En [5] y [6], también se ha trabajado la modelación matemática no lineal de sistemas híbridos de tanques conectado, con estrategia de control predictivo para el control de nivel de uno y dos tanques.

En la presente investigación se presenta el desarrollo de un modelo matemático no lineal para un sistema de 4 tanques interconectados, a continuación la Linealización en espacio de estados, la simulación de un control PID desacoplado, control predictivo MPC y control predictivo lineal GPC, cuyo objetivo es la regulación de nivel en dos de ellos.

II. MODELACIÓN

El sistema de ecuaciones diferenciales (1) representa el balance de masa del sistema de cuatro tanques acoplados, integrando para el cálculo del flujo de salida por los orificios, la ley de Torricelli y considerando que los flujos que dan las bombas son directamente proporcionales a sus tensiones. Se considera que las fracciones de agua en cada división de las tuberías son constantes.

$$\begin{aligned} \frac{dh_1}{dt} &= f_1 \frac{kq}{S} u_1 + f_1 \frac{kr}{S} u_2 - f_2 \frac{a_1}{S} \sqrt{2gh_1} \pm f_2 \frac{a_{13}}{S} \sqrt{2g|h_1 - h_3|} \\ \frac{dh_2}{dt} &= f_1 \frac{kp}{S} u_1 + f_2 \frac{a_1}{S} \sqrt{2gh_1} - f_2 \frac{a_2}{S} \sqrt{2gh_2} \\ \frac{dh_3}{dt} &= f_1 \frac{kr}{S} u_1 + f_1 \frac{kq}{S} u_2 - f_2 \frac{a_3}{S} \sqrt{2gh_3} \mp f_2 \frac{a_{13}}{S} \sqrt{2g|h_1 - h_3|} \\ \frac{dh_4}{dt} &= f_1 \frac{kp}{S} u_2 + f_2 \frac{a_3}{S} \sqrt{2gh_3} - f_2 \frac{a_4}{S} \sqrt{2gh_4} \end{aligned} \quad (1)$$

Donde h_i es el nivel del tanque i . a_i es el área de la tubería de descarga del tanque i . a_{13} es el área de la tubería entre los tanques uno y tres. S es el área transversal de los tanques (igual para los cuatro). k es la constante de proporcionalidad entre la tensión y el caudal. p, q y r son las fracciones en las divisiones de las tuberías. f_1 y f_2 son factores de ajuste del modelo. u_i es la tensión en la bomba i .

El módulo funciona de la siguiente manera: se bombea agua desde un tanque de almacenamiento por medio de dos bombas de corriente continua en la configuración que se muestra en la Figura 1. La bomba uno suministra a los tanques uno, dos y tres mientras la dos a los tanques uno, tres y cuatro.

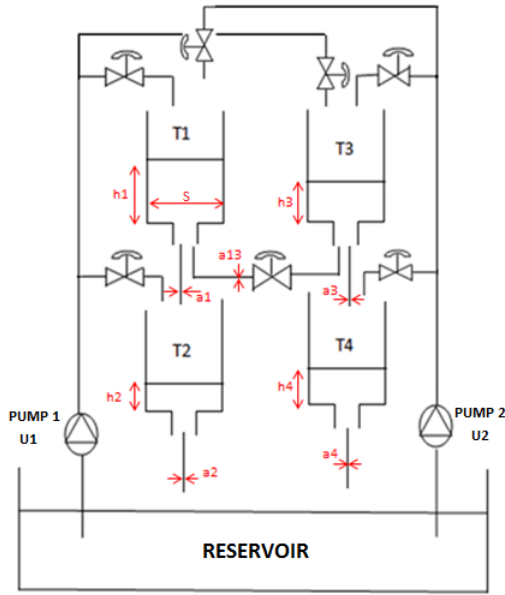


Fig. 1. Diagrama del Sistema de cuatro Tanques acoplados.

Los tanques uno y cuatro están conectados por una tubería, en la cual puede fluir agua en los dos sentidos.

Se realizó la simulación del modelo mediante diagrama de bloques usando el software Matlab/Simulink. Se tomaron los parámetros y entradas de tensión (ver cuadro I) manteniéndolas constantes hasta llegar al estado estacionario.

En la Figura II se muestran las respuestas a lazo abierto de los niveles de los cuatro tanques en condiciones de válvulas abiertas completamente. Las dinámicas de los superiores (tanques uno y tres) son más rápidas que las de los inferiores (tanques dos y cuatro), teniendo tiempos de establecimiento de 100 y 150 segundos respectivamente.

TABLE I
VALOR DE PARÁMETROS.

Parámetro	Valores	Unidades
u_1	9	Volts
u_2	13	Volts
a_1	0.3	cm^2
a_2	0.6	cm^2
a_3	0.5	cm^2
a_4	0.8	cm^2
a_{13}	0.3	cm^2
p	0.6	-
q	0.2	-
r	0.2	-
S	100	cm^2
k	0.9375	$l/(\text{min} \times \text{V})$
g	9.81	cm/seg^2
f_1	100/6	-
f_2	10	-

De igual manera se observa que la ganancia estática de los tanques superiores es menor que la de los tanques inferiores debido a la configuración y apertura de las válvulas.

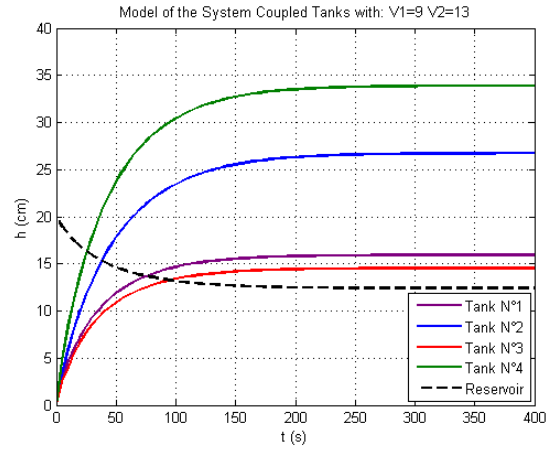


Fig. II. Comportamiento del nivel de los tanques acoplados.

III. LINEALIZACIÓN DEL MODELO

Para implementar el sistema de control es necesario linealizar las ecuaciones del modelo matemático en torno a los niveles estacionarios de los tanques y a los valores de tensión que lo permitieron, esto se realizó usando la serie de Taylor y truncando hasta el término de primer orden, luego se agrupó las ecuaciones lineales en matrices para representar el sistema en espacio de estados, como sigue:

$$\dot{\bar{H}} = A\bar{H} + B\bar{U} \quad (2)$$

Donde el vector de estados son deltas de los niveles en los tanques:

$$\dot{\bar{H}} = \begin{bmatrix} \dot{h}_1 & \dot{h}_2 & \dot{h}_3 & \dot{h}_4 \end{bmatrix}^T \quad \bar{H} = \begin{bmatrix} \bar{h}_1 & \bar{h}_2 & \bar{h}_3 & \bar{h}_4 \end{bmatrix}^T$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & 0 \\ b_{31} & b_{32} \\ 0 & b_{42} \end{bmatrix} \quad \bar{U} = \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \end{bmatrix}$$

Tener en cuenta lo siguiente:

$$\bar{u}_i = u_i - u_{i0} \quad (3)$$

$$\bar{h}_j = h_j - h_{j0} \quad (4)$$

Para $i = 1, 2$. y $j = 1, 2, 3, 4$.

Además los términos de la matriz A y la matriz B del sistema Lineal son los siguientes:

$$a_{11} = -\frac{f_2}{S} \sqrt{\frac{g}{2}} \left(\frac{a_1}{\sqrt{h_{10}}} + \frac{a_{13}}{\sqrt{|h_{10} - h_{30}|}} \right) \quad (5)$$

$$a_{13} = a_{31} = \frac{f_2}{S} \sqrt{\frac{g}{2}} \left(\frac{a_{13}}{\sqrt{|h_{10} - h_{30}|}} \right) \quad (6)$$

$$a_{21} = \frac{f_2}{S} \sqrt{\frac{g}{2}} \left(\frac{a_1}{\sqrt{h_{10}}} \right) \quad (7)$$

$$a_{22} = -\frac{f_2}{S} \sqrt{\frac{g}{2}} \left(\frac{a_2}{\sqrt{h_{20}}} \right) \quad (8)$$

$$a_{33} = -\frac{f_2}{S} \sqrt{\frac{g}{2}} \left(\frac{a_3}{\sqrt{h_{30}}} + \frac{a_{13}}{\sqrt{|h_{10} - h_{30}|}} \right) \quad (9)$$

$$a_{43} = \frac{f_2}{S} \sqrt{\frac{g}{2}} \left(\frac{a_3}{\sqrt{h_{30}}} \right) \quad (10)$$

$$a_{44} = -\frac{f_2}{S} \sqrt{\frac{g}{2}} \left(\frac{a_4}{\sqrt{h_{40}}} \right) \quad (11)$$

$$b_{11} = b_{32} = f_1 \left(\frac{kq}{S} \right) \quad (12)$$

$$b_{21} = b_{42} = f_1 \left(\frac{kp}{S} \right) \quad (13)$$

$$b_{12} = b_{31} = f_1 \left(\frac{kr}{S} \right) \quad (14)$$

Y la salida del sistema lineal es representado por la ecuación (15), que son los niveles de los tanques 2 y 4 a controlar.

$$Y = C\bar{H} + D\bar{U} \quad (15)$$

$$Y = [\bar{h}_2 \quad \bar{h}_4]^T$$

Por lo tanto, por simple inspección se deduce que la matriz C y la matriz D deben ser las siguientes:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Las ecuaciones (2) y (15) representan el modelo lineal. La comparación de la simulación del modelo lineal (ML) y el modelo no lineal (MNL) se muestran en la Figura 2.

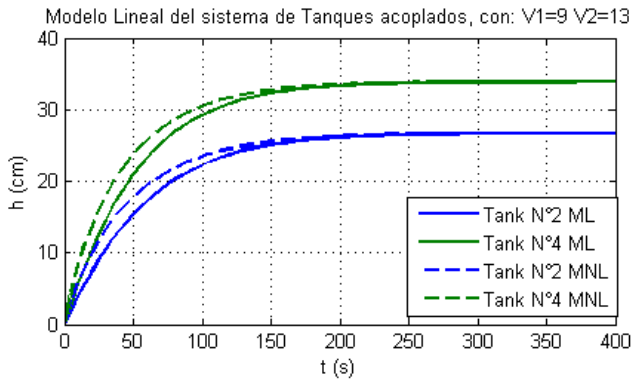


Fig. 2. Comportamiento del nivel del modelo Lineal.

Se evidencia que la modelación lineal cumple con brindar una buena aproximación del modelo alrededor del punto de trabajo, esto permite implementar un sistema de control lineal para estas condiciones de trabajo.

IV. DISEÑO DEL CONTROL PI-DESACOPLADOR

El principal objetivo es controlar el nivel de líquido en los tanques 2 y 4 para que sigan a los valores de las referencias; esto se lleva a cabo mediante la manipulación de las tensiones u_1 y u_2 que permiten impulsar caudal de las bombas mediante las relaciones $Q_1 = ku_1$ y $Q_2 = ku_2$ donde k se considera una constante de proporcionalidad.

Se tiene el sistema lineal en espacio de estados representado por las ecuaciones (2) y (15) que cuenta con dos entradas y dos salidas. Sin embargo, para implementar el control mediante PID se necesita tener el sistema representado en una matriz de transferencia, por lo tanto, de las ecuaciones antes mencionadas se puede llegar a lo siguiente:

$$T(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (16)$$

Donde la matriz de transferencia tiene cuatro términos por ser un sistema de dos entradas y dos salidas:

$$T(s) = \begin{bmatrix} T_{11} = \frac{1,7465}{40,7s + 1} & T_{12} = \frac{0,3573}{70,8s + 1} \\ T_{21} = \frac{0,3594}{56,6s + 1} & T_{22} = \frac{1,2371}{30,06s + 1} \end{bmatrix} \quad (17)$$

Analizaremos los siguientes criterios para medir la interacción del sistema para seleccionar agrupamientos adecuados entre las variables manipuladas y controladas.

Numero de Condición (CN):

$$T(0) = \begin{bmatrix} 1,7465 & 0,3573 \\ 0,3594 & 1,2371 \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$CN(T) = \frac{\bar{\sigma}(T)}{\underline{\sigma}(T)} = 1,8357 \quad (19)$$

Por resultar un valor pequeño no existirán problemas de control.

Relative Gain Array (RGA):

$$RGA = \begin{bmatrix} 1,0632 & -0,0632 \\ -0,0632 & 1,0632 \end{bmatrix} \quad (20)$$

Los agrupamientos adecuados son: $u_1 \rightarrow y_1$ y $u_2 \rightarrow y_2$

Desacoplador: Se procede a implementar un desacoplador estático para tener un mejor manejo de las variables a controlar.

$$D(s) = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{T_{12}(0)}{T_{11}(0)} \\ -\frac{T_{21}(0)}{T_{22}(0)} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -0,2046 \\ -0,2905 & 1 \end{bmatrix} \quad (21)$$

Ahora, el nuevo sistema comprende al desacoplador y la matriz de transferencia que están en serie resultando una matriz diagonal. El diagrama de bloques del control PI MIMO se muestra en la Figura 3.

Por ello, al sintonizar los PID por asignación de polos es sobre el sistema resultante.

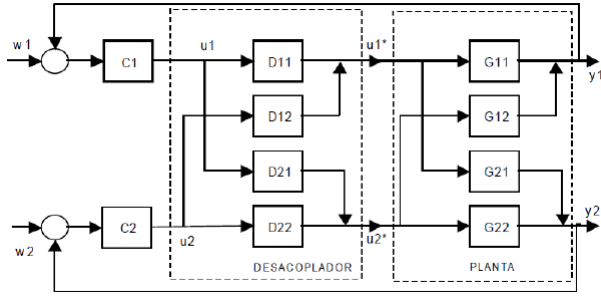


Fig. 3. Diagrama del control PI-Desacoplador para el proceso de Tanques Acoplados.

V. DISEÑO DE CONTROLADORES PREDICTIVOS

V-A. MPC con espacio de estados

El modelo lineal en espacio de estados representado por las ecuaciones (2) y (15) se pasa a tiempo discreto con un tiempo de muestreo adecuado, obteniéndose la ecuación (22).

$$\begin{cases} x_m(k+1) = A_m x_m(k) + B_m u(k) \\ y(k) = C_m x_m(k) \end{cases} \quad (22)$$

Se elige un nuevo vector variable de estado para formar otro sistema, sea: $x(k) = [\Delta x_m(k) \ y(k)]^T$. Así, la ecuación (23) describe el nuevo sistema incrementado según la metodología en [7]:

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + B\Delta u(k) \\ y(k) = Cx(k) \end{cases} \quad (23)$$

Donde:

$$A = \begin{bmatrix} A_m & 0_m^T \\ C_m A_m & I_{qxq} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} B_m \\ C_m B_m \end{bmatrix} \quad C = [0_m \quad I_{qxq}]$$

Solución del Control Predictivo:

En base al nuevo sistema incrementado (23); la predicción de estados y salidas son calculadas secuencialmente. La notación simplificada se muestra en la ecuación (24).

$$Y = Fx(k_i) + \Phi \Delta U \quad (24)$$

Donde:

$$\Delta U = [\Delta u(k_i)^T \quad \Delta u(k_i+1)^T \dots \quad \Delta u(k_i+N_c-1)^T]^T$$

$$Y = [y(k_i+1|k_i)^T \quad y(k_i+2|k_i)^T \dots \quad y(k_i+N_p|k_i)^T]^T$$

$$F = [CA^T \quad (CA^2)^T \quad (CA^3)^T \dots \quad (CA^{N_p})^T]^T$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} CB & 0 & 0 & \dots & 0 \\ CAB & CB & 0 & \dots & 0 \\ CA^2B & CAB & CB & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{N_p-1}B & CA^{N_p-2}B & CA^{N_p-3}B & \dots & CA^{N_p-N_c}B \end{bmatrix}$$

Además N_c y N_p son los horizontes de control y predicción respectivamente.

El controlador presenta la siguiente función de costo:

$$J = (R_s - F\hat{x}(k_i))^T (\bar{R}_s r(k_i) - F\hat{x}(k_i)) - 2\Delta U^T \Phi^T (R_s - F\hat{x}(k_i)) + \Delta U^T (\Phi^T \Phi + \bar{R}) \Delta U \quad (25)$$

Donde R_s es el vector de referencias futuras y \bar{R} es la matriz diagonal de pesos que regula la inversión entre la calidad del control y el consumo de energía. La solución al optimizar ésta función de costo es analítica, pero en el caso que esté sujeta a restricciones, la solución se obtiene mediante programación cuadrática en línea.

Estimación de Estados: En aplicaciones reales, no todas las variables son medibles, es por ello que se hace uso de un observador, construido mediante la siguiente ecuación:

$$\hat{x}(k_i+1) = A\hat{x}(k_i) + B\Delta u(k_i) + K_{ob}(y(k_i) - C\hat{x}(k_i)) \quad (26)$$

Finalmente, el diagrama de bloques para el control predictivo MPC con espacio de estados se muestra en la Figura 4.

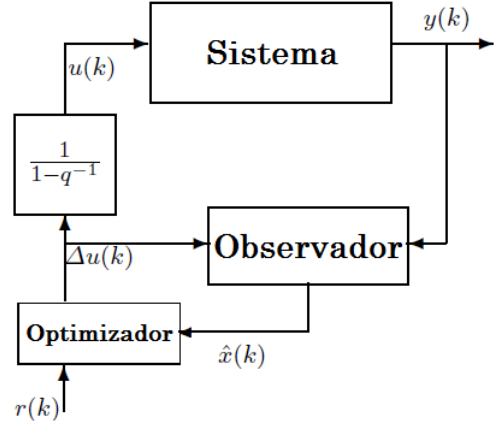


Fig. 4. Diagrama MPC con espacio de estados para el proceso de Tanques Acoplados.

V-B. Control Predictivo Generalizado (GPC)

Al igual que el PID, también se trabaja con la matriz de transferencia solo que en tiempo discreto, por ello, la ecuación (17) la discretizamos con un tiempo de muestreo $T_s=5$ s, luego obtenemos las matrices polinomiales $A(z^{-1})$ y $B(z^{-1})$ para poder empezar con la modelación del controlador según [8].

El modelo *CARIMA* para un proceso multivariable puede ser expresado como (27):

$$A(z^{-1})y(t) = B(z^{-1})u(t-1) + \frac{1}{\Delta}C(z^{-1})e(t) \quad (27)$$

Para hallar los polinomios $E(z^{-1})$ y $F_j(z^{-1})$ se hace necesario usar la Ecuación Diofántica, que esta representada por (28):

$$I_{n \times n} = E_j(z^{-1})\bar{A}(z^{-1}) + z^{-j}F_j(z^{-1}) \quad (28)$$

Así, las matrices $E(z^{-1})$ y $F_j(z^{-1})$ pueden computarizarse recursivamente mediante:

$$E_{j+1}(z^{-1}) = E_j(z^{-1}) + F_{j,0}z^{-j} \quad (29)$$

$$F_j(z^{-1}) = (I - E_j(z^{-1})\bar{A}(z^{-1}))z^j \quad (30)$$

Teniendo en cuenta además que:

$$E_1 = I$$

$$F_1 = z(I - \bar{A})$$

Además $F_{j,0}$ es el coeficiente sub cero de $F_j(z^{-1})$. Luego se procede a calcular las matrices G :

$$E_j(z^{-1})B(z^{-1}) = G_j(z^{-1}) + z^{-j}G_{jp}(z^{-1}) \quad (31)$$

La ecuación que representa a las salidas predecidas del proceso puede ser expresada como (32):

$$\hat{y}(t+j|t) = G_j(z^{-1})\Delta u(t+j-1) + f_j \quad (32)$$

Donde f_j es considerada la respuesta libre del sistema, la ecuación (33) muestra los términos que la forman.

$$f_j = G_{jp}(z^{-1})\Delta u(t-1) + F_j(z^{-1})y(t) \quad (33)$$

Los terminos de la respuesta libre pueden ser calculados recursivamente por (34):

$$f_{j+1} = z(I - \bar{A}(z^{-1}))f_j + B(z^{-1})\Delta u(t+j) \quad (34)$$

contemplando que $f_0 = y(t)$ y $\Delta u(t+j) = 0$ para $j \geq 0$

Resumiendo, la expresión que nos dá las predicciones está dada por la ecuación (35)

$$y = Gu + f \quad (35)$$

Finalmente, la función de costo es representada mediante la ecuación (36), donde w es el vector predictor de las referencias, y R es la matriz diagonal de pesos que regula la inversión entre la calidad del control y el consumo de energía.

$$J = (Gu + f - w)^T(Gu + f - w) + u^T Ru \quad (36)$$

El diagrama de control predictivo GPC se muestra en la Figura 5.

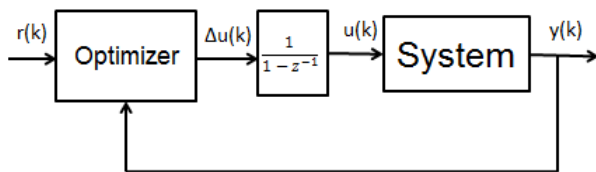


Fig. 5. Diagrama GPC para el proceso de Tanques Acoplados.

V-C. Restricciones

La implementación de restricciones son para que las variables manipulables presenten un adecuado comportamiento sin sobrepasar sus límites físicos ni realizar cambios bruscos provocando que disminuya su tiempo de vida. También permiten limitar a que la salida del sistema se mantenga dentro de unos límites de calidad. Las matrices de restricciones se obtubieron de acuerdo a [7] y se aplicó el método de programación cuadrática a las funciones de costo para hallar los $\Delta u(k)$ óptimos en cada tiempo de muestreo. La ecuación (37) representa a las funciones de costo:

$$J = \frac{1}{2}x^T Hx + x^T b + c \quad (37)$$

Haciendo la analogía de términos de la ecuación (37) con las funciones de costo (25) y (36) se obtiene:

Variables	MPC con espacio de estados	GPC
x	ΔU	u
H	$2(\Phi^T \Phi + \bar{R})$	$2(G^T G + R)$
b	$2\Phi^T(F * x - R_s)$	$2G^T(f - w)$

Las restricciones implementadas son:

$$\begin{aligned} -1 &\leq \Delta u(k) \leq 1 \\ 4 &\leq u(k) \leq 17 \\ 10 &\leq y(k) \leq 40 \end{aligned}$$

VI. RESULTADOS DE SIMULACIÓN

VI-A. Señales de Salida

Se observa que en las Figuras 6 y 7 que el nivel de los tanques consigue llegar a la referencia, sin embargo, los controladores predictivos lo hacen mucho más rápido, ya que se anticipan al cambio de la referencia.

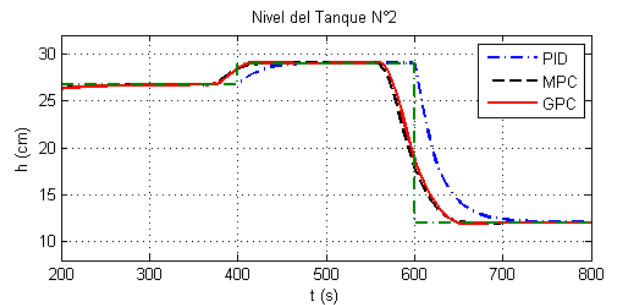


Fig. 6. Control del Tanque N°2

El desempeño del GPC y del MPC con espacio de estados parece no marcar una notable diferencia entre ellos para este tipo de proceso. Las referencias del el Tanque N°4 son 32 cm para $t=400$ s y 38 cm para $t=600$ s. Las referencias para el Tanque N°2 son 32 cm para $t=400$ s y 38 cm para $t=600$ s.

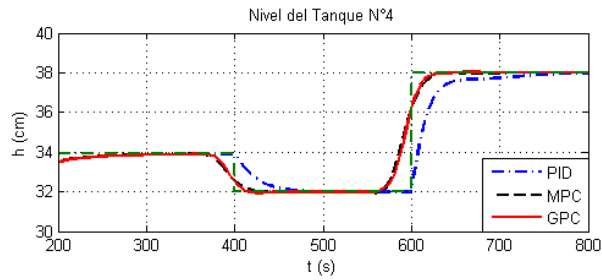


Fig. 7. Control del Tanque N°4

VI-B. Variables manipulables

El comportamiento de las electrobombas es mucho más suave con los controladores predictivos.

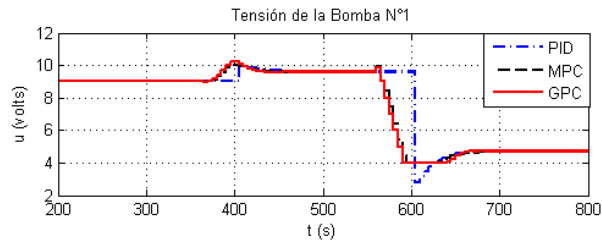


Fig. 8. Comportamiento de la Tensión en la Bomba N°1

También se nota la presencia de la restricción en la electrobomba N°1 para $t=600$ s, no permite que tenga una tensión inferior a 4 Volts, sin embargo en el control PI no se evidencia esto.

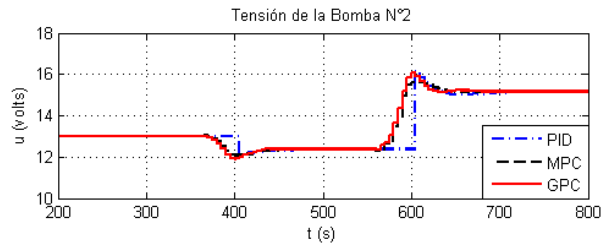


Fig. 9. Comportamiento de la Tensión en la Bomba N°2

VI-C. Incrementos de las variables manipulables

La gráfica de los incrementos permite evidenciar si existen cambios bruscos en la variables manipuladas. En los contro-

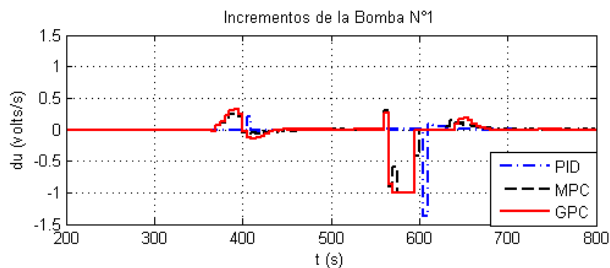


Fig. 10. Incrementos de la Tensión en la Bomba N°1

ladores predictivos se nota que no se respeta las restricciones

puestas, ya que las gráficas están entre -1 y 1, sin embargo, en el control PI para la electrobomba N°1 en $t=600$ s le es indiferente ya que no tiene restricciones puestas.

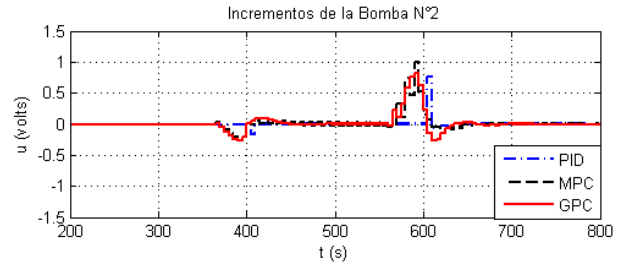


Fig. 11. Incrementos de la Tensión en la Bomba N°2

VII. CONCLUSIONES

El control PI puede hacer que las variables manipulables tengan un comportamiento brusco y que operen fuera de sus límites de operación, sin embargo tener en cuenta que esto no afecta a todos los procesos.

Los controladores GPC y MPC con espacio de estados permiten anticiparse ante los cambios de referencia y gracias a las restricciones poder operar con suavidad a los actuadores y establecer límites de operación. Por lo tanto, los controladores predictivos presentan mejor desempeño, mejor calidad y mejor ahorro de la energía en comparación al control mediante PID con desacoplador para el sistema de tanques acoplados analizado.

REFERENCES

- [1] A. C. Aguilar, O. C. Castro, F. F. Obando, "Control PID desacoplado para un sistema de tanques interactuantes". International Society of Automation, IV Automatisa 2013, Bogotá, Colombia.
- [2] A. Harivignesh, P. Tamilmam, Ms. P. Kalaiyarasi, "System identification and design of controllers for a hybrid tank system". 2014 IEEE International Conference on Innovations in Engineering and Technology, volume 3, Special Issue 3, March 2014, ISSN 2319-8753. India.
- [3] V. Kirubakaran, T. K. Radhakrishnan, N. Sivakumaran, "Distributed multiparametric model predictive control design for a quadruple tank process". 2013, Elsevier.
- [4] C. Joseph, V. I. George, P.R. Venkateswaran, Design an implementation of model predictive control for a three-tank hybrid system, 2013. International Journal of Computer Science and Electronics Engineering (ICJSEE), Volume 1, Issue 2, ISSN 2320-4028.
- [5] Khalid, M.U. and Kadri, M.B., Liquid level control of nonlinear Coupled Tanks System using linear model predictive control, International Conference on Emerging Technologies (ICET), Islamabad, 2012, ISBN: 978-1-4673-4452-4
- [6] F. Stinga, A. Soimu, (2010), Hybrid modelling and control for a two-tank system, Presented at ICSTC 2010, [Online]. Available: <http://www.ace.tuiasi.ro/users/103/5F410stinga.pdf>.
- [7] W. Liuping, Discrete-time MPC for Beginners, Model Predictive Control System Design, and Implementation Using MATLAB, Springer, United Kingdom, 2009, pp. 22-83.
- [8] E. Camacho and C. Bordons, Multivariable MPC, Model Predictive Control, Springer, Spain, 1998, pp. 132-159.

ANEXO B

CÓDIGO DEL ALGORITMO DEL CONTROLADOR PID

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% CÓDIGO DEL ALGORITMO PID %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
clc; clear all; close all;
%% MNL
tanksMNL_ejecutor % aqui se define Ts
%% Parámetros
Tsim=1000;
tR=[450 700];
%% Entradas y Salidas
[n m]=size(Bs);%# de entradas
[q n]=size(Cs);%# de salidas    m>=q
%% Matriz de Transferencia
s=tf('s');
I=eye(length(As));

As=[-0.0206    -0.0026    -0.0005     0.0006
     0.0234    -0.0190     0.0008     0.0011
     0.0018    -0.0011    -0.0230    -0.0028
     0.0001     0.0001     0.0261    -0.0214]; %FIT=77.64% 161215

Bs=[0.0010     0.1171
     0.0189    -0.0059
     0.1014    -0.0036
    -0.0017     0.0119];

T=Cs*((s*I-As)\Bs)+Ds; %Matriz de transferencia

%load('Giden.mat')
%G=Giden;

%% Análisis del MIMO
T0=dcgain(T);%subs(G,0);
CN=cond(T0)%mide el grado de interacción,si es menor que 10 esta bien,
RGA=T0.*inv(T0)' %la diagonal del RGA son casi la unidad(casi sin
interacción)
prod=T0(1,1)*T0(2,2);
N=det(T0)/prod;
%% Sintonización de PIs (se hizo por asignación de polos)
kp1=T0(2,1);
T21hist=step(T(2,1),t);
nn=1;
while T21hist(nn) < 0.6321*kp1
nn=nn+1;
end
Tau1=t(nn);
p11=1.7/Tau1;p12=1.3/Tau1;
k1=(Tau1*(p11+p12)-1)/kp1;
Ti1=k1*kp1/(Tau1*p11*p12); ki1=k1/Ti1;

kp2=T0(1,2);
T12hist=step(T(1,2),t);
nn=1;
while T12hist(nn) < 0.6321*kp2
nn=nn+1;
end
Tau2=t(nn);
p21=1.7/Tau2;p22=1.3/Tau2;

```

```

k2=(Tau2*(p21+p22)-1)/kp2;
Ti2=k2*kp2/(Tau2*p21*p22); ki2=k2/Ti2;

kb=0.5; %para el antiwindup

%% Inicialización de variables
nk=round(Tsim/Ts)+1; % # de veces que se itera.
ncl1=round(tR(1)/Ts)+1;
ncl2=round(tR(2)/Ts)+1;
u=zeros(m,nk);
u_atras=zeros(m,nk);
du=zeros(m,nk);
y=zeros(q,nk);
X=zeros(n,nk);%estados reales del SS normal(medidos)
E1=0;E2=0;%acumulación de errores integrales
EU1=0;EU2=0;%acumulación de (u-u_atras) integrales para antiwindup
t=0:Ts:Tsim;
%% Comunicación con el módulo

k=2;
    u(:,k)=U0;
    manipula_bombas
    lee_salidas
    %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% PLOTEOS %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
    figure(2)
    %y
    subplot(2,1,1);
    %co=get(gca,'ColorOrder');% Initial
    %set(gca,'ColorOrder',[0 170/255 170/255;0 0 1;1 0 0;0 127/255
0],'NextPlot','replacechildren');
    %co=get(gca,'ColorOrder');% Verify it changed
    plot(t(1),y(:,k),'LineWidth',2);hold on;
    axis([0 Tsim 0 60]);grid on
    legend('Tanque N°2','Tanque
N°4','Orientation','vertical','Location','northwest');
    title(['Dos lazos de control PI: k1=',num2str(k1),'
Ti1=',num2str(Ti1),...
' ; k2=',num2str(k2),' , Ti2=',num2str(Ti2),' , Anti-windup:
kb=',num2str(kb)])
    ylabel('h (cm)');
    %u
    subplot(2,1,2);
    plot(t(1),u(1,1),'Color',[255/255 102/255 0],'LineWidth',2); hold on
    plot(t(1),u(2,1),'Color',[122/255 16/255 228/255],'LineWidth',2);
hold on

legend('u(1)','u(2)','Orientation','vertical','Location','northwest');
    axis([0 Tsim 18 25]);grid on
    title(['saturaciones: ',num2str(U0(1)-2.5),'<=u(1)<=24 y
',num2str(U0(2)-2.5),'<=u(2)<=24'])
    ylabel('u (volts)');
    xlabel('t (s)');

for k=3:nk
    tic
    if k<ncl1

```

```

    u(:,k)=U0;
else
    if k<=ncl2
        ex=1;
    else
        ex=2;
    end
    %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
    e1=Rh2(ex)-y(1,k-1);
    e2=Rh4(ex)-y(2,k-1);
    E1=e1*Ts+E1;
    E2=e2*Ts+E2;
    EU1=u(2,k)-u_atras(2,k)+EU1;
    EU2=u(1,k)-u_atras(1,k)+EU2;

    u_atras(:,k)=[k2*e2+ki2*E2+kb*EU2;
                 k1*e1+ki1*E1+kb*EU1];
    u_atras(:,k)=u_atras(:,k)+U0;

    %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
    %Limites de u1
    if u_atras(1,k)<U0(1)-2.5
        u(1,k)=U0(1)-2.5;
    elseif u_atras(1,k)>24
        u(1,k)=24;
    else
        u(1,k)=u_atras(1,k);
    end

    %Limites de u2
    if u_atras(2,k)<U0(2)-2.5
        u(2,k)=U0(2)-2.5;
    elseif u_atras(2,k)>24
        u(2,k)=24;
    else
        u(2,k)=u_atras(2,k);
    end

    du(:,k)=u(:,k)-u(:,k-1);

    manipula_bombas
end
lee_salidas
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
figure(2)
%y
subplot(2,1,1);
plot(t(k-1:k),y(:,k-1:k),'LineWidth',2);
%plot(t(k-1:k),y(2,k-1:k),'LineWidth',2);
%u
subplot(2,1,2);
stairs(t(k-1:k),u(1,k-1:k),'Color',[255/255 102/255
0], 'LineWidth',2); hold on
stairs(t(k-1:k),u(2,k-1:k),'Color',[122/255 16/255
228/255], 'LineWidth',2); hold on

```

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% REFERENCIAS %%%%%%%%%%
if k==ncl1-1
    Y0=y(:,k);
    Rh2=[45 45];
    Rh4=[28 28];
    spoint=[];
    spoint(1,:)=[ repmat(y(1,ncl1-1),1,ncl1-1) repmat(Rh2(1),1,ncl2-
ncl1) repmat(Rh2(2),1,nk-ncl2+1)];
    spoint(2,:)=[ repmat(y(2,ncl1-1),1,ncl1-1) repmat(Rh4(1),1,ncl2-
ncl1) repmat(Rh4(2),1,nk-ncl2+1)];
    %Referencia
    subplot(2,1,1);
    stairs(t,spoint(1,:), 'r--', 'LineWidth',1.5);hold on
    stairs(t,spoint(2,:), 'r--', 'LineWidth',1.5);hold on
end
k
delay=toc
pause(Ts-delay)
end
message=[1 16 0 6 0 2 4 0 0 0 0];comunicar;

```

ANEXO C

CÓDIGO DEL ALGORITMO DEL CONTROLADOR MPC

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% CÓDIGO DEL ALGORITMO MPC %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
clc;clear all;close all;
% Sistema en ss continuo
tanksMNL_ejecutor % aqui se define Ts
%% Parámetros
Tsim=1000;
nu=9;
n2=12;
lamb=1.5;
tR=[450 700];
% Restricciones (deben ingresarse como vectores normalizados)
u_min=[-2.5 -2.5]';u_max=[2.5 2.5]';
du_min=[-0.5 -0.5]';du_max=[0.5 0.5]';
y_min=[-50 -50]';y_max=[50 50]';
%% Entradas y Salidas
[n m]=size(Bs);%# de entradas
[q n]=size(Cs);%# de salidas    m>=q
Ds=zeros(q,m);
%% Sistema en ss discreto
Gs=ss(As,Bs,Cs,Ds);
Gz=c2d(Gs,Ts,'zoh');
%Am=Gz.A; Bm=Gz.B;

Am=[0.9014    -0.0117    -0.0023     0.0025
     0.1061     0.9087     0.0036     0.0049
     0.0076    -0.0051     0.8906    -0.0124
     0.0008     0.0001     0.1168     0.8978];

Bm=[0.0035     0.5566
     0.0913     0.0041
     0.4788    -0.0150
     0.0227     0.0555]; %IDEN 77.64% del 161215

Cm=Gz.C; Dm=Gz.D;
%% Sistema aumentado
A=eye(n+q);
A(1:n,1:n)=Am;
A(n+1:n+q,1:n)=Cm*Am;
B=zeros(n+q,m);
B(1:n,:)=Bm;
B(n+1:n+q,:)=Cm*Bm;
C=zeros(q,n+q);
C(:,n+1:n+q)=eye(q);
%% Y=F*x+PHI*u
for i=1:n2
    F((i-1)*q+1:i*q,:)=C*A^i;
    h((i-1)*q+1:i*q,:)=C*A^(i-1)*B;
end
F; % F(n2xq,nxq)
PHI=zeros(q*n2,m*nu);
for k=1:n2
    for i=1:nu
        if i+k-nu>0
            PHI((k-1)*q+1:k*q,((nu-i+1)-1)*m+1:(nu-i+1)*m)=h((i+k-nu)-
1)*q+1:(i+k-nu)*q,:);
        end
    end
end

```

```

        end
    end
    PHI;
    %% Constraints

    %Restricciones de "u"
    C1= repmat(eye(m), nu, 1);
    C2=zeros(m*nu, m*nu);
    for k=1:nu
        for i=1:nu
            if (k>i)
            else
                C2(m*(i-1)+1:m*i, m*(k-1)+1:m*k)=eye(m);
            end
        end
    end
    end
    M1=[-C2; C2];
    %d1=[C1*(u(k-1)-u_min); C1*(-u(k-1)+u_max)];

    %Restricciones de "du"
    I=eye(m*nu); M2=[-I; I];
    d2=[-C1*du_min; C1*du_max];

    %Restricciones de "y"
    M3=[-PHI; PHI];
    C3=repmat(eye(q), n2, 1);
    %d3=[-C3*y_min+F*x(k); C3*y_max-F*x(k)];

    M=[M1' M2' M3']';

    %% Inicialización de variables
    nk=round(Tsim/Ts)+1; % # de veces que se itera.
    uop=zeros(m*nu, nk);
    du=zeros(m, nk);
    u=zeros(m, nk);
    y=zeros(q, nk);
    x=zeros(n+q, nk); % estados estimados del SS aumentado
    %X=zeros(n, nk); % estados reales del SS normal (medidos)
    X=[];
    %% Referencia General
    ncl1=round(tR(1)/Ts)+1;
    ncl2=round(tR(2)/Ts)+1;

    %% Términos de la Función de Costo
    Rraya=lamb*eye(nu*m);
    H=2*(PHI'*PHI+Rraya);
    b=zeros(nu*m, nk);
    %% Observador
    Ob=obsv(A, C); rankOb=rank(Ob); % Tienen que ser observable
    % los polos deben ser menor que la unidad en abs, para que sea estable;
    P=[0.1 0.01 0.01 0.8 0.6 0.5];
    L=place(A', C', P)';

    t=0:Ts:Tsim;
    %% Comunicación con el módulo
    opts = optimset('Algorithm', 'active-set'); % para el quadprog

```



```

%Limites de u1
if u(1,k)<U0(1)-2.5
    u(1,k)=U0(1)-2.5;
elseif u(1,k)>24
    u(1,k)=24;
end

%Limites de u2
if u(2,k)<U0(2)-2.5
    u(2,k)=U0(2)-2.5;
elseif u(2,k)>24
    u(2,k)=24;
end

manipula_bombas
end
lee_salidas
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% PLOTEOS %%%%%%%%%&%%%%%%%%
figure(2)
%y
subplot(2,1,1);
plot(t(k-1:k),y(:,k-1:k)', 'LineWidth', 2);
%u
subplot(2,1,2);
stairs(t(k-1:k),u(1,k-1:k), 'Color', [255/255 102/255
0], 'LineWidth', 2); hold on
stairs(t(k-1:k),u(2,k-1:k), 'Color', [122/255 16/255
228/255], 'LineWidth', 2); hold on
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% REFERENCIAS %%%%%%%%%&%%%%%%%%
if k==ncl1-n2-1
    Y0=y(:,k);
    Rh2=[28 28];
    Rh4=[25 25];
    Ref=[Rh2;Rh4];
    REF=zeros((nk+n2)*q,1);
    REF((ncl1-1)*q+1:(ncl2-1)*q)= repmat(Ref(:,1)-Y0,ncl2-ncl1,1);
    REF((ncl2-1)*q+1:(nk+n2)*q)= repmat(Ref(:,2)-Y0,(nk+n2)-ncl2+1,1);
    spoint=zeros(q,nk); % Referencia a graficar
    spoint(:,1:ncl1-1)=repmat(Y0,1,ncl1-1);
    spoint(:,ncl1:ncl2-1)=repmat(Ref(:,1),1,ncl2-ncl1);
    spoint(:,ncl2:nk)=repmat(Ref(:,2),1,nk-ncl2+1);
    %Referencia
    subplot(2,1,1);
    stairs(t,spoint(1,:), 'r--', 'LineWidth', 1.5);hold on
    stairs(t,spoint(2,:), 'r--', 'LineWidth', 1.5);hold on
end
k
delay=toc
pause(Ts-delay)
end
message=[1 16 0 6 0 2 4 0 0 0 0];comunicar;

```